



ДОНЕЦКАЯ НАРОДНАЯ РЕСПУБЛИКА
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ДОНЕЦКИЙ ИНСТИТУТ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

КАФЕДРА „ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА”

В. М. Савенков, В. Ю. Тимохина, Ю. В. Тимохин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие
для студентов механических специальностей

Донецк –2018

УДК 539.3/8 (075.8)

Сопротивление материалов (учебное пособие для студентов механических специальностей) / В. Н. Савенков, В. Ю. Тимохина, Ю. В. Тимохин – Донецк: ДОНИЖТ, 2018. – 143 с.

Рассмотрено на заседании кафедры “Высшая математика и физика”
24 мая 2018 г., протокол № 4.

Утверждено методической комиссией факультета Управление на железнодорожном транспорте, ДОНИЖТ, 28 августа 2018 г., протокол № 1.

Приведены основные разделы учебной дисциплины “ Сопротивление материалов ”: основные понятия, простые и сложные виды деформации, расчеты при переменных нагрузках, устойчивость сжатых стержней.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей «Подвижной состав железных дорог», «Эксплуатация железных дорог».

Составители

доцент	В. Н. Савенков (ДонНТУ)
старший преподаватель	В. Ю. Тимохина (ДОНИЖТ)
доцент	Ю. В. Тимохин (ДОНИЖТ)

Рецензенты

професор	А.Г. Татьянченко (ДонНТУ)
професор	Н. В. Паламарчук (ДОНИЖТ)

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	5
1.1 Введение	5
1.2 Объекты расчета	5
1.3 Внешние силы (нагрузки)	6
1.4 Внутренние силы (усилия). Метод сечений	7
1.5 Виды деформации стержней	10
1.6 Напряжения	11
1.7 Допускаемые напряжения. Условие прочности	12
1.8 Перемещения и деформации	13
1.9 Основные гипотезы сопротивления материалов	14
2 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	15
2.1 Продольная сила	15
2.2 Нормальные напряжения. Условие прочности	18
2.3 Продольные и поперечные деформации. Условие жесткости	21
2.4 Механические свойства материалов. Испытания материалов на растяжение и сжатие	24
2.5 Допускаемые напряжения при растяжении (сжатии)	29
2.6 Расчет статически неопределимых систем на растяжение (сжатие)	33
3 СДВИГ	34
3.1 Понятие о сдвиге	34
3.2 Касательные напряжения. Условие прочности	35
4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	36
4.1 Статические моменты.....	36
4.2 Моменты инерции.....	40
4.3 Изменение моментов инерции сечения при повороте осей координат.....	41
4.4 Главные оси инерции и главные моменты инерции.....	42
4.5 Моменты сопротивления.....	44
4.6 Радиус инерции сечения.....	44
4.7 Моменты инерции простых фигур.....	44
4.8 Геометрические характеристики сечений сложной формы.....	48
4.9 Главные плоскости стержня.....	53
5 КРУЧЕНИЕ	53
5.1 Крутящий момент. Эпюры крутящих моментов	53
5.2 Касательные напряжения	55
5.3 Условие прочности.....	59
5.4 Деформации при кручении. Условие жесткости	60
6 ИЗГИБ.....	61
6.1 Основные понятия	61
6.2 Типы опор балок. Типы балок	62
6.3 Определение опорных реакций в балках	64
6.4 Внутренние силовые факторы при изгибе.....	65

6.5	Дифференциальные зависимости при изгибе.....	67
6.6	Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов	68
6.7	Нормальные напряжения при прямом чистом изгибе	73
6.8	Нормальные и касательные напряжения при прямом поперечном изгибе	79
6.9	Деформации при изгибе	84
7	СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	90
7.1	Основные сведения.....	90
7.2	Расчет балки при косом изгибе.....	91
7.3	Внецентренное растяжение или сжатие.....	98
7.4	Изгиб с кручением.....	103
8	ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ.....	106
8.1	Напряженное состояние в точке.....	106
8.2	Определение главных напряжений.....	108
8.3	Определение напряжений на наклонных площадках.....	112
8.4	Теория предельных напряженных состояний.....	113
8.5	Гипотезы прочности.....	114
8.6	Проверка прочности при изгибе с кручением.....	115
9	ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ.....	117
9.1	Усталость материалов.....	118
9.2	Циклы напряжений.....	119
9.3	Предел выносливости.....	120
9.4	Факторы, влияющие на предел выносливости.....	122
9.5	Диаграмма предельных амплитуд.....	124
10	УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	128
10.1	Критическая сила сжатого стержня.....	128
10.2	Влияние закрепления стержня на критическую силу.....	131
10.3	Критические напряжения сжатого стержня.....	132
10.4	Формула Ф. Ясинского.....	135
10.5	Выбор сечения сжатого стержня.....	137
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	142

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1 Введение

Сопротивление материалов – наука о методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений.

При эксплуатации элементы машин и сооружений подвергаются влиянию внешних нагрузок, которые приводят к их деформации (изменению размеров и формы), а в некоторых случаях и разрушению. Для обеспечения безопасной и долговечной работы машин и сооружений их элементы должны удовлетворять условиям прочности, жесткости и устойчивости.

Прочность – способность конструкции и ее элементов выдерживать воздействие внешней нагрузки, не разрушаясь.

Жесткость – способность конструкции и ее элементов противодействовать изменению начальных размеров и формы при действии внешней нагрузки.

Устойчивость – способность конструкции и ее элементов сохранять начальную форму упругого равновесия.

1.2 Объекты расчета

Конструктивные элементы машин и сооружений можно свести к одному из трех видов тел: брусу, оболочке или массивному телу.

Брусом, или стержнем, называют тело, один из размеров которого (длина) значительно больше двух других размеров. Брусья бывают прямолинейные (рис.1, *a*, *в*, *г*), криволинейные (рис. 1, *б*). Прямолинейный брус называется стержнем.

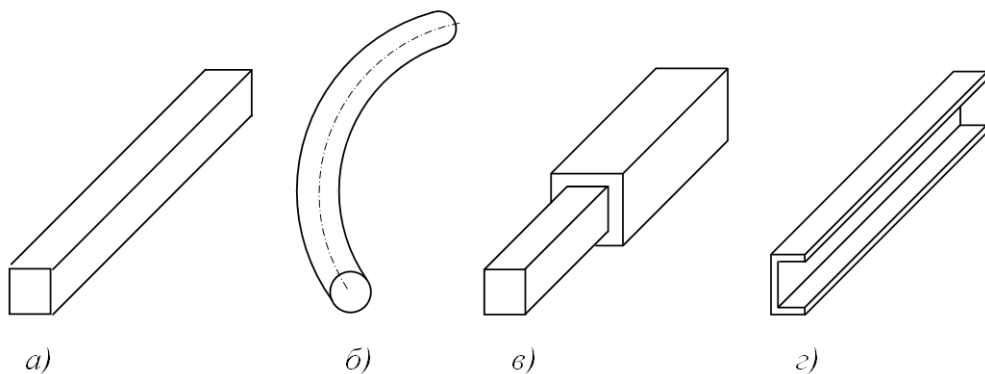


Рисунок 1.1 – Брусья

Оболочка – это тело, один из размеров которого (толщина) значительно меньше двух других. Оболочки бывают цилиндрические (рис. 1.2,

a), конические (рис. 1.2, *б*), сферические (рис. 1.2, *в*) и другие. Плоские оболочки называются пластинками (рис. 1.2, *г*, *д*).

Массивные тела имеют все три размера одного порядка.

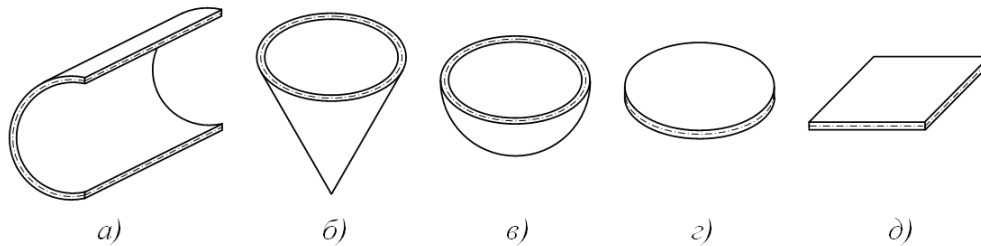


Рисунок 1.2 – Оболочки

В сопротивлении материалов рассматриваются в основном изолированные отдельные элементы конструкций типа стержней. Из стержней составляются большинство конструкций и сооружений: каркасы домов, опоры линий электропередачи, фермы подъемных кранов, валы и оси механизмов, рамы машин и т.п.

Расчеты на прочность, жесткость и устойчивость оболочек и массивных тел значительно более сложные, чем расчеты стержней, и рассматриваются в специальных курсах.

1.3 Внешние силы (нагрузки)

Силы, которые действуют на элемент конструкции со стороны других тел, относительно элемента являются внешними. Внешние силы называются нагрузками. Они приложены к некоторым участкам поверхности элемента или распределены по объему. К объемным силам относят вес элемента, силы инерции, электромагнитные силы. К поверхностным относят, например, силу атмосферного давления, силы давления сыпучих грузов, силу давления колеса на рельс и т.д.

Нагрузки делятся на сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенная нагрузка действует по малой в сравнении с размерами детали площади и условно принимается приложенной в точке (рисунок 1.3). Сосредоточенную нагрузку будем обозначать буквой F , его размерность Н и кН.

Распределенная нагрузка – это нагрузка, приложенная к участку тела большой площади или объему, и при составлении расчетной схемы ее нельзя заменить сосредоточенной. Обычно распределенную нагрузку приводят к нагрузке, которая приходится на единицу длины тела. Обозначается распределенная нагрузка буквой q , его размерность Н/м, или кН/м (рис. 1.4).

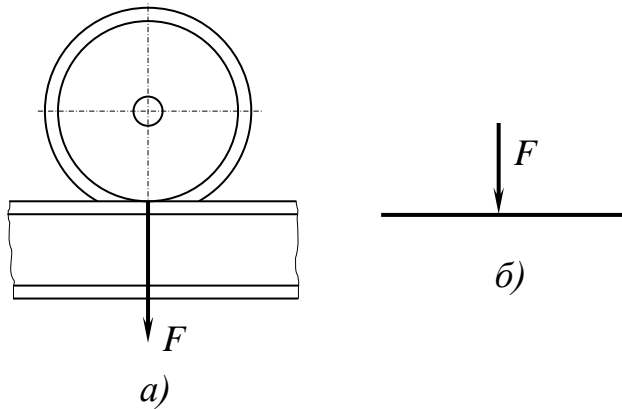


Рисунок 1.3 – Сосредоточенная нагрузка:

a – конструктивная схема;

б – расчетная схема

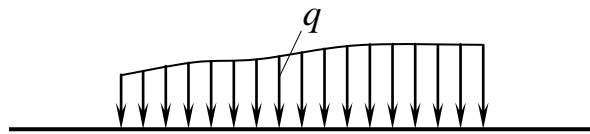


Рисунок 1.4 – Распределенная нагрузка

По характеру влияния на элементы конструкций нагрузки делятся на статические и динамические.

Статические нагрузки не изменяют свою величину и положение на теле на протяжении значительного времени и не вызывают значительных его ускорений. Силами инерции при статической нагрузке можно пренебречь.

Динамические нагрузки изменяют величину и положение на теле со временем, а потому вызывают значительные ускорения тела. Возникающими при этом силами инерции пренебречь нельзя. Динамические нагрузки делятся на мгновенно приложенные, ударные и повторно-переменные.

1.4 Внутренние силы (усилия). Метод сечений

При действии внешних сил на тело в нем возникают внутренние силы, которые препятствуют изменению формы и размеров тела. Эти внутренние силы являются предметом изучения сопротивления материалов. Их называют внутренними усилиями.

Внутренние усилия определяются методом сечений, суть которого рассмотрим на таком примере.

Тело, которое под действием внешней нагрузки находится в состоянии статического равновесия, условно разрежем на две части сечением, внутреннее усилие в котором необходимо определить (рис. 1.5, *a*). Условно отбросим любую часть тела по одну сторону от

сечения. Действие отброшенной части тела на оставшуюся часть заменим соответствующими внутренними усилиями (рисунок 1.5, б).

Любая система внутренних усилий, которые действуют в сечении, может быть приведена к главному вектору сил \vec{R} , например, приложенному в центре тяжести сечения, и главному моменту \vec{I} относительно центра тяжести сечения (рисунок 1.5, в).

Поскольку все тело находится в состоянии статического равновесия, то и отсеченная часть должна быть уравновешена. Для отсеченной части стержня внутренние усилия вместе с другими внешними силами входят в уравнение равновесия и могут быть определены из них.

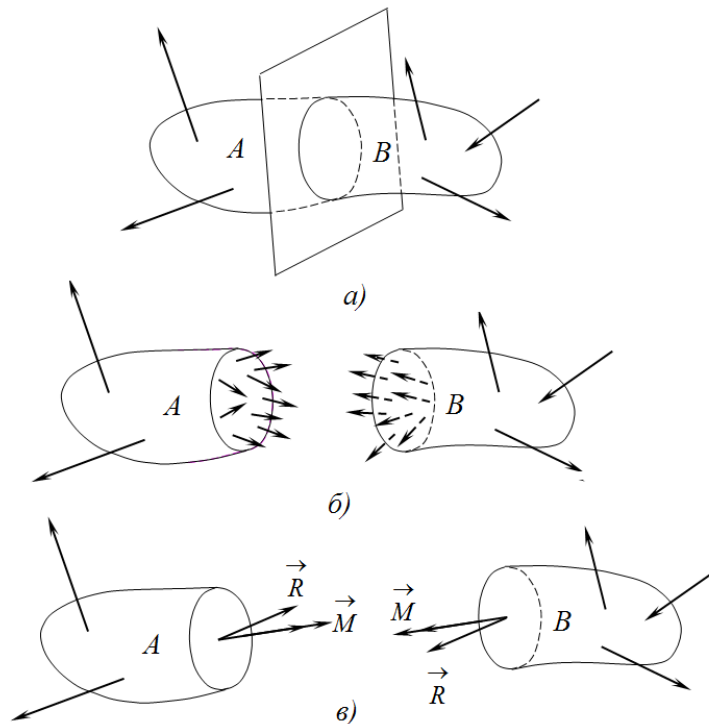


Рисунок 1.5 – Внутренние усилия в сечении нагруженного тела

Согласно закону Ньютона в этом же сечении отброшенной части тела действуют такие же внутренние усилия, но направленные противоположно.

Более подробно рассмотрим определение внутренних усилий в стержнях (рис. 1.6). Рассечем стержень, нагруженный уравновешенной системой внешних нагрузок $F_1 \dots F_n$, поперечным сечением (рис. 1.6, а). Примем для стержней такое расположение координатных осей: ось z направим вдоль продольной оси стержня, оси x и y – перпендикулярно к ней (рис. 1.6, б). Если поперечное сечение стержня имеет оси симметрии, то оси x и y , соответственно, совпадают с осями симметрии. Усилия, как правило, определяются для поперечных сечений, перпендикулярных продольной оси z .

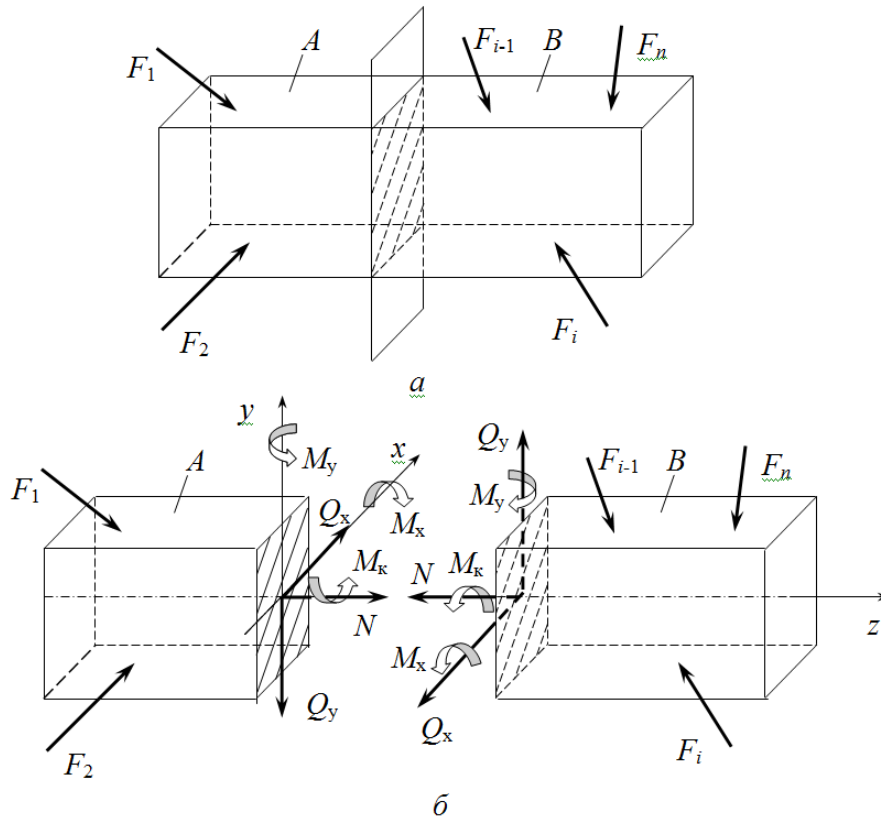


Рисунок 1.6 – Внутренние усилия в сечении нагруженного стержня

Для удобства определения внутренних усилий разложим главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M} на составляющие по осям координат:

$$\vec{R} = \vec{Q}_x + \vec{Q}_y + \vec{N}; \quad \vec{M} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_\epsilon. \quad (1.1)$$

Для упрощения на рисунке 1.6 не показаны векторы \vec{R} и \vec{M} , а вместо составляющих \vec{M}_x , \vec{M}_y , \vec{M}_ϵ указаны только направления их действия.

Составляющие главного вектора сил и главного момента называются внутренними силовыми факторами и имеют свои названия, связанные с деформациями:

Q_x , Q_y – поперечные силы; N – продольная сила;
 M_x , M_y – изгибающие моменты; M_ϵ – крутящий момент.

Силовые факторы в сечении стержня можно определить из условий равновесия отсеченной части стержня (из уравнений статики):

$$\begin{aligned} 1) \sum F_i^z = 0; \quad 2) \sum F_i^x = 0; \quad 3) \sum F_i^y = 0; \\ 4) \sum M_i^z = 0; \quad 5) \sum M_i^x = 0; \quad 6) \sum M_i^y = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\sum F_i^z$; $\sum F_i^x$; $\sum F_i^y$ – суммы проекций внешних сил на оси координат z , x и y , приложенных к стержню по одну сторону от сечения;

$\sum M_i^z$; $\sum M_i^x$; $\sum M_i^y$ – суммы моментов внешних сил относительно осей координат z , x и y , приложенных к стержню по одну сторону от сечения.

Из первого уравнения условий равновесия (1.2) определяется продольная сила N ; из второго и третьего уравнений – поперечные силы Q_x и Q_y ; из четвертого уравнения – крутящий момент M_k ; из пятого и шестого уравнений – соответственно изгибающие моменты M_x^y и M_y^x .

1.5 Виды деформации стержней

Внутренние усилия в разных сечениях тела неодинаковы. Деформирование того или другого элемента зависит от того, какие усилия на него действуют. Если в поперечном сечении возникает лишь один внутренний силовой фактор, то такой случай деформации называют простым видом деформации. К простым видам деформаций относятся: растяжение (сжатие), сдвиг (срез), кручение, чистый изгиб.

Растяжение (сжатие) имеет место тогда, когда на стержень действуют внешние силы вдоль его оси. Тогда в его любых поперечных сечениях возникает только продольная сила N (рис. 1.7, а, б). Сдвиг (срез) возникает в тех случаях, когда в поперечном сечении действует поперечная сила Q (рис. 1.7, в). При кручении в любом поперечном сечении стержня возникает только крутящий момент M_k (рис. 1.7, з). Чистый изгиб наблюдается, когда в поперечных сечениях стержня действует только изгибающий момент M_n (рис. 1.7, д).

В тех случаях внешней нагрузки, когда в поперечном сечении стержня одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов, говорят о сложном виде сопротивления стержня.

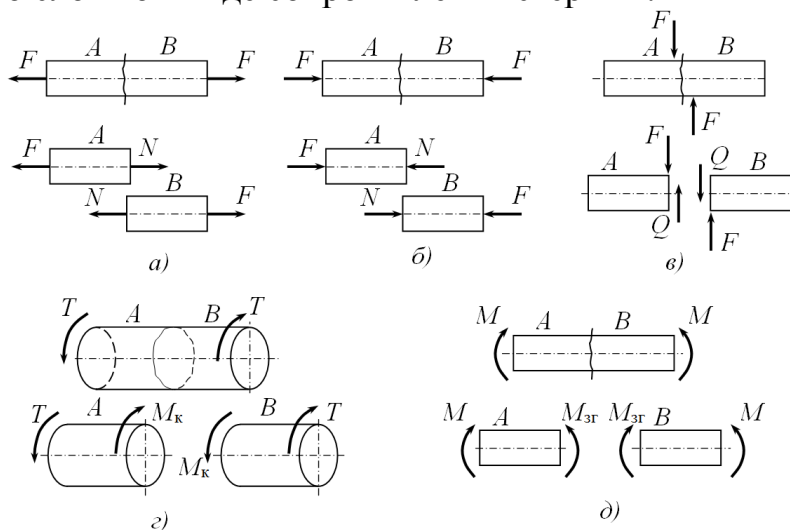


Рисунок 1.7 – Простые виды деформации стержней

1.6 Напряжения

Внутренние силовые факторы являются интегральными характеристиками и не позволяют судить о распределении усилий по сечению. Поэтому по их величине невозможно сравнить условия нагружения элементов конструкций разных размеров и формы и находящихся под действием разного вида внешней нагрузки.

Для этого в сопротивлении материалов вводится понятие напряжения.

Выделим в сечении тела в окрестности произвольной точки K с координатами x и y (рис. 1.8) элементарную площадку dA , на которой действует внутреннее усилие $d\vec{R}$. Размеры площадки примем такими, чтобы изменением внутренних усилий внутри нее можно было пренебречь. Тогда равнодействующая $d\vec{R}$ будет приложена в центре площадки. Силу $d\vec{R}$ разложим на нормальную составляющую dN (проекция на нормаль к площадке) и касательную составляющую dQ (проекция на плоскость сечения).

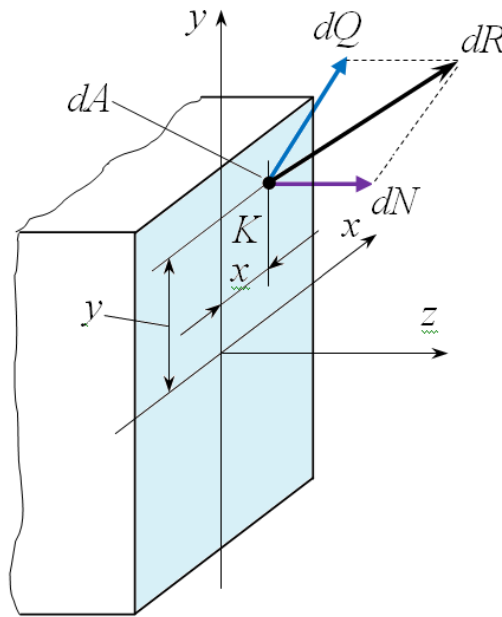


Рисунок 1.8 – Усилия на элементарной площадке сечения стержня

Величина $p = \frac{dR}{dA}$ называется полным напряжением в данной точке анализируемого сечения.

Аналогично вводятся понятия нормального σ и касательного τ напряжений

$$\sigma = \frac{dN}{dA}; \quad \tau = \frac{dQ}{dA}.$$

При необходимости касательное напряжение τ в плоскости сечения может быть разложено на составляющие τ_x и τ_y .

Следует заметить, что нельзя говорить о напряжении в данной точке без указания положения сечения, в котором оно действует, так как через точку можно провести бесчисленное множество сечений.

Нормальное напряжение в точке сечения характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц тела, расположенных по обеим сторонам от сечения, а касательное напряжение – интенсивность сил, которые сдвигают эти частицы в плоскости сечения.

Полное, нормальное и касательное напряжения связаны зависимостью

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} . \quad (1.3)$$

Напряжение численно равняется внутренней силе, которая действует на единицу площади в данной точке. Размерность напряжения $1 \frac{Н}{м^2} = 1 \frac{Н}{м^2} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{Н}{м^2}$. Суммируя по сечению тела элементарные внутренние нормальные силы σdA и касательные силы τdA и их элементарные моменты относительно осей x , y и z , получим зависимости, которые связывают напряжения и внутренние усилия

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_A \tau_x dA; & M_x &= -\int_A \sigma \rho dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_y dA; & M_y &= -\int_A \sigma \delta dA; \\ N &= \int_A \sigma dA; & M_z &= \int_A (\tau_x \rho - \tau_y \delta) dA. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Распределение напряжений по сечению не может быть определено из этих уравнений, так как число точек в сечении бесконечно, а уравнений – шесть.

1.7 Допускаемые напряжения. Условие прочности

Напряжения $\sigma_{\text{до}}$ и $\tau_{\text{до}}$, при которых происходит разрушение материала или возникают значительные пластические (остаточные) деформации называются предельными. Их значения определяются при испытаниях материала.

Чтобы не допустить разрушения элементов конструкций, возникающие в элементах напряжения σ и τ не должны превышать допустимых напряжений $[\sigma]$ или $[\tau]$.

Допускаемые напряжения $[\sigma]$ или $[\tau]$ – это максимальные нормальные или касательные напряжения, при которых обеспечивается нормальная работа материала. Они задаются как некоторая часть предельных напряжений

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{i0}}{n}; \quad [\tau] = \frac{\tau_{i0}}{n}, \quad (1.5)$$

где n – допускаемый коэффициент запаса прочности.

Коэффициент запаса прочности зависит от свойств материала, действующих нагрузок, точности метода расчета, условий работы.

Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям имеют вид

$$\sigma \leq [\sigma]; \quad \tau \leq [\tau], \quad (1.6)$$

где σ , τ – действующие (фактические) напряжения;
 $[\sigma]$, $[\tau]$ – допускаемые напряжения.

1.8 Перемещения и деформации

Под действием внешних нагрузок точки тела перемещаются, а сами тела деформируются (изменяют свои размеры и форму). Как правило, перемещения и деформации незначительные и могут быть зафиксированы только с помощью чувствительных приборов – тензометров.

Для характеристики деформации точек тела вводят понятия относительной линейной деформации и относительной угловой деформации.

Определим эти понятия на примере деформации тела, изображенного на рис. 1.9.

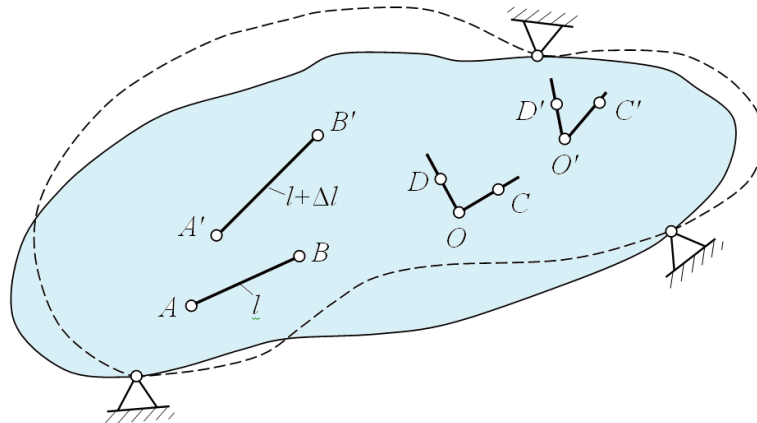


Рисунок 1.9 – Деформации в напряженном теле

Рассмотрим точки A и B , до нагружения тела расположенные друг от друга на расстоянии l . После приложения нагрузки точки A и B переместятся, соответственно, в положения A' и B' , а расстояние между ними изменится на величину Δl . Величина Δl является абсолютной линейной деформацией отрезка AB . Она измеряется в единицах длины (м, мм, мкм и др.).

Приближая точку B к A , устремим длину отрезка l к нулю.

Предел отношения абсолютной деформации отрезка к его начальной длине называют относительной линейной деформацией по направлению AB

$$\varepsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.7)$$

Обычно деформации тела определяются по направлению координатных осей. Они обозначаются ε_x , ε_y , ε_z .

Рассмотрим прямой угол $\angle COD$, образованный в недеформированном теле отрезками OC и OD . После приложения нагрузки угол будет $\angle C'O'D'$. Приближая точки C и D к O в пределе получим величину изменения прямого угла $\angle COD$

$$\gamma_{\angle COD} = \lim_{l \rightarrow 0} (\angle COD - \angle C'O'D'). \quad (1.8)$$

Это изменение прямого угла, выраженное в радианах, называется относительной угловой деформацией в точке O в плоскости, образованной отрезками OC и OD .

Обычно относительные угловые деформации определяют в трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостях. Они обозначаются γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zy} .

1.9 Основные гипотезы сопротивления материалов

Определение напряжений в точках сечения тела по известным значениям внутренних силовых факторов – статически неопределимая задача. Для ее решения уравнения статики (1.4) дополняют геометрическими соотношениями – уравнениями деформаций.

Эти уравнения записываются на основании ряда гипотез (допущений) о свойствах материала и о характере деформаций. Это такие гипотезы:

- гипотеза сплошности материала (материал сплошь заполняет форму тела);

- гипотеза об однородности и изотропности материала (в любом объеме и направлении свойства материала одинаковы);
- гипотеза о малости деформаций (деформации малы по сравнению с размерами тела и ими можно пренебречь при определении положения нагрузок на конструкции);
- гипотеза об идеальной упругости материала (материал имеет абсолютную упругость и для него справедлив закон Гука, который выражает линейную зависимость между нагрузками и деформациями);
- принцип суперпозиции (независимости действия сил – позволяет определить результат влияния на конструкцию нескольких нагрузок как сумму результатов каждой нагрузки отдельно);
- принцип Сен-Венана (если в пределах некоторой области упругого тела приложена система сил, то на расстоянии, которое существенным образом превышает характерные размеры этой области, напряжения и деформации практически одинаковы для всех статически эквивалентных систем сил);
- гипотеза плоских сечений (поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его продольной оси до приложения к нему нагрузок, остаются плоскими и нормальными к продольной оси и при действии нагрузки).

2 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1 Продольная сила

Растяжение (сжатие) – деформация, при которой в поперечном сечении бруса возникает только продольное растягивающее или сжимающее усилие.

Растягивающие усилия принято считать положительными, сжимающие – отрицательными.

Растяжение (сжатие) вызывается внешними силами, которые действуют вдоль продольной оси стержня.

Деформации растяжения (сжатия) испытывают болты, штанги, канаты, опоры мостов, элементы ферм металлоконструкций и т.п.

Рассмотрим стержень длиной l , который растягивается двумя силами F , направленными вдоль продольной оси z (рис. 2.1, a).

Для определения внутреннего усилия мысленно рассечем стержень поперечным сечением с координатой z ($0 \leq z \leq l$). Отбросим правую часть стержня, а действие отброшенной части заменим внутренней нормальной силой N (другие силовые факторы в сечении отсутствуют, так как проекции внешних сил на оси x и y равны нулю).

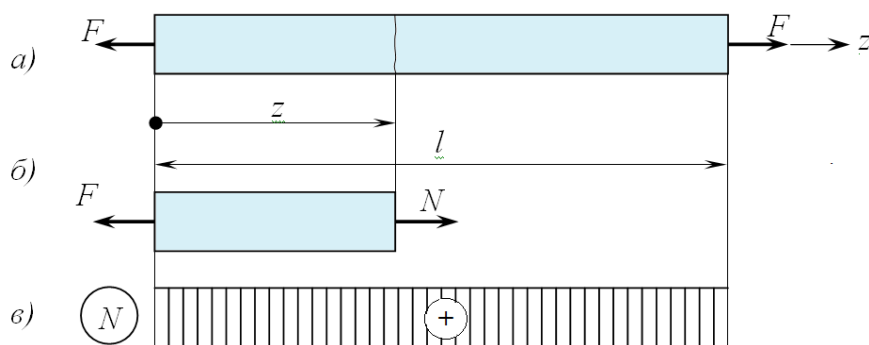


Рисунок 2.1 – Продольные силы в стержне

Из условия равновесия левой части (суммы проекций сил на ось z) (рис. 2.1, б)

$$\sum F_z = -F + N = 0$$

находим нормальную силу

$$N = F. \quad (2.1)$$

По закону Ньютона в сечении правой части стержня действует такая же внутренняя сила N , но направленная противоположно. Нетрудно убедиться, что правая часть стержня также уравновешена. Как следует из (2.1) нормальная сила в сечении не зависит от координаты сечения z , во всех сечениях стержня действует та же самая внутренняя сила N .

График изменения продольных сил по длине стержня называется эпюрой продольных сил (рис. 2.1, в). Для ее построения от базовой линии, проведенной параллельно продольной оси стержня, перпендикулярно откладываем ординаты продольных сил, действующих в сечениях стержня. Штриховка эпюры выполняется прямыми линиями, перпендикулярными базовой линии. В общем случае (когда на стержень действует произвольное число сил разных направлений) выражение (2.1) приводится к виду

$$N = \sum F_{zi}, \quad (2.2)$$

где $\sum F_{zi}$ – алгебраическая сумма проекций внешних сил на продольную ось стержня, приложенных по одну сторону от сечения.

Продольная сила в произвольном сечении стержня равна алгебраической сумме проекций внешних сил на продольную ось, приложенных по одну сторону от сечения. Внешние растягивающие силы (направленные

от сечения) берутся со знаком “+”, внешние сжимающие силы (направленные к сечению) – со знаком “–”.

Построим эпюру продольных сил для стержня, расчетная схема которого приведена на рис. 2.2, а. Стержень закреплен правым концом и нагружен силами $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 3$ кН и $F_3 = 7$ кН.

Разобьем стержень на 3 участка, границами которых являются точки приложения внешних сил.

Мысленно рассечем стержень поперечным сечением с координатой z_1 ($0 \leq z_1 \leq l_1$) на участке 1. Суммируя внешние силы справа от сечения z_1 (рисунок 2.2, а), получим продольную силу в сечении

$$N_1 = -F_1 = -8 \text{ кН.}$$

Сила F_1 сжимает стержень (направлена к сечению z_1), поэтому взята со знаком “–”.

Продольная сила не зависит от координаты сечения z_1 , поэтому во всех сечениях на участке 1 действует одна и та же внутренняя сила N_1 .

Аналогично определяется внутренняя сила для сечений с координатами z_2 ($0 \leq z_2 \leq l_2$) и z_3 ($0 \leq z_3 \leq l_3$), соответственно, для участков 2 и 3:

$$N_2 = -F_1 + F_2 = -8 + 3 = -5 \text{ кН;}$$

$$N_3 = -F_1 + F_2 - F_3 = -8 + 3 - 7 = 2 \text{ кН.}$$

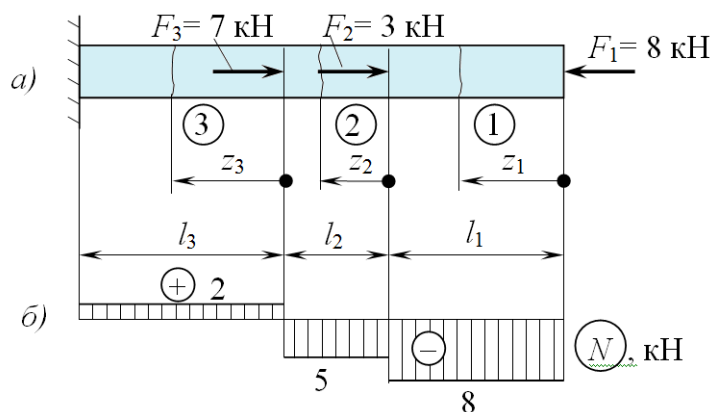


Рисунок 2.2 – Построение эпюры продольных сил

Эти же продольные силы могут быть определены суммированием внешних сил, приложенных слева от сечения z_1 , тем не менее, для этого предварительно необходимо найти опорную реакцию в опоре А.

Эпюра продольных сил стержня приведена на рисунке 2.2, б).

Для длинных или массивных стержней в расчетах необходимо учитывать их собственный вес.

Рассмотрим стержень большой длины, закрепленный верхним концом и нагруженный силой F (рис. 2.3, а). Площадь поперечного сечения стержня A , удельный вес материала γ .

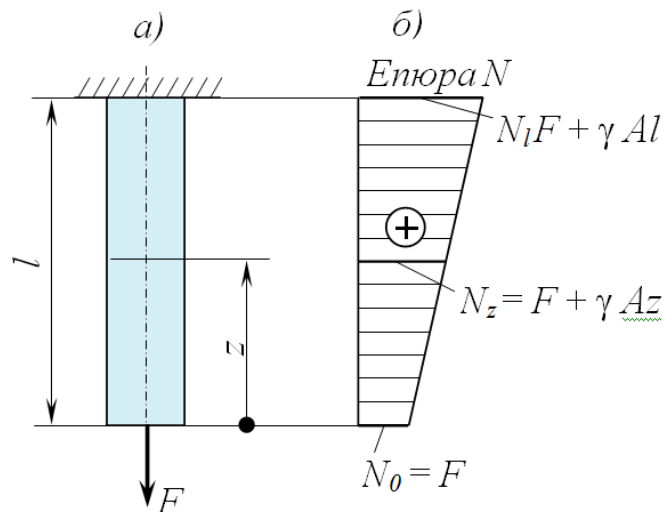


Рисунок 2.3 – Построение эпюры продольных сил с учетом веса стержня

Ниже сечения с произвольной координатой z ($0 \leq z \leq l$) на стержень действует растягивающая сила F и вес участка стержня длиной z .

$$N = F + \gamma A z. \quad (2.3)$$

Зависимость (2.3) – уравнение прямой линии. Для ее построения определим значения продольных сил на концах стержня

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 & \quad N = F; \\ \text{при } z = l & \quad N = F + \gamma A l. \end{aligned}$$

Эпюра продольных сил приведена на рисунке 2.3, б.

2.2 Нормальные напряжения. Условие прочности

Продольная сила N – это равнодействующая элементарных нормальных сил σdA , которые действуют в поперечном сечении стержня (см. формулу (1.4)).

Для определения нормальных напряжений σ по известному значению продольной силы N необходимо знать закон их распределения по сечению.

Это статически неопределимая задача. Она решается с учетом деформации стержня и закона Гука.

Рассмотрим растяжение стержня (изготовленного, например, для большей наглядности, из резины) на поверхности которого нанесена прямоугольная сетка продольных и поперечных линий (рис. 2.4).

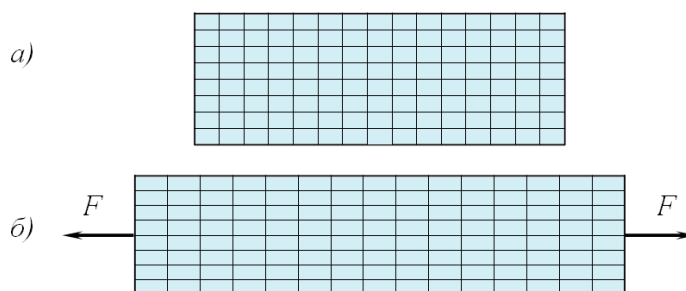


Рисунок 2.4 – Деформация стержня при растяжении:
a – до растяжения; *б* – после растяжения

При действии нагрузки продольные и поперечные линии не искривляются и остаются взаимно перпендикулярными. Изменяются лишь расстояния между ними: между поперечными линиями – увеличиваются, а между продольными – уменьшаются. Если предположить, что внутри стержня деформации имеют тот же характер, что и на поверхности, то полученный результат является подтверждением гипотезы плоских сечений.

Все поперечные сечения перемещаются параллельно и деформация стержня во всех точках поперечного сечения одинакова. По закону Гука в них действуют одинаковые нормальные напряжения

$$\sigma = \text{const} .$$

Поэтому в выражении (1.4) σ можно вынести за знак интеграла

$$N = \sigma \int dA .$$

В таком виде его можно проинтегрировать

$$N = \sigma A ,$$

где A - площадь поперечного сечения стержня.

Откуда

$$\sigma = \frac{N}{A} . \quad (2.4)$$

Фактическое распределение напряжений в сечениях стержня, которые примыкают к месту приложения внешних сил, зависит от способа их приложения и может быть неравномерным. Тем не менее, по мере удаления поперечных сечений от места приложения внешних сил, деформации и эпюры напряжений выравниваются и на расстоянии, приблизительно равном наибольшему из поперечных размеров стержня, распределение напряжений можно согласно принципу Сен-Венана считать практически равномерным. Применение принципа Сен-Венана позволяет не учитывать конкретные способы приложения внешних сил.

Так, на рис. 2.5 один и тот же стержень, закрепленный верхним концом, нагружается на свободном конце статически эквивалентными нагрузками, равнодействующие которых выражаются величиной вектора F . Нагрузки приложены разными способами: а) в виде сосредоточенной осевой силы; б) в виде двух сил; в) в виде распределенной нагрузки. Исследования показывают, что во всех случаях в поперечном сечении, удаленном на расстояние, которое превышает в 1,5-2 раза его поперечные размеры, напряжения практически одинаковы.

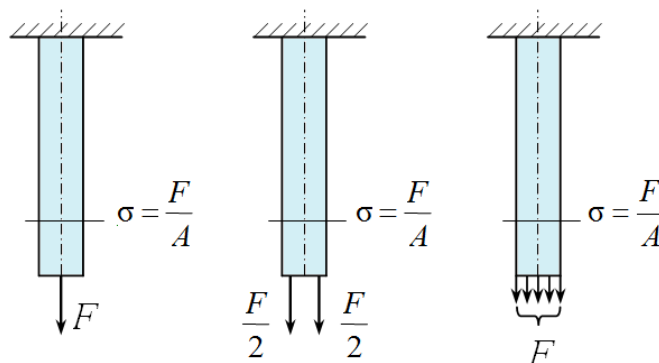


Рисунок 2.5 – Пояснения принципа Сен-Венана

Для обеспечения прочности стержня фактические напряжения в поперечных сечениях стержня не должны превышать допустимых значений, т.е.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (2.5)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение материала бруса на растяжение (сжатие).

Зависимость (2.5) представляет собой условие прочности при растяжении (сжатии).

Из условия (2.5) кроме проверки прочности можно определить:

- площадь поперечного сечения бруса (необходимо при проектном расчете)

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}; \quad (2.6)$$

- допускаемую силу при заданных размерах поперечного сечения

$$[N] = [\sigma]A. \quad (2.7)$$

2.3 Продольные и поперечные деформации. Условие жесткости

При растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются, при сжатии наоборот, длина уменьшается, а поперечные размеры увеличиваются.

На рис. 2.6 приведен растянутый стержень. Его деформированный вид показан штриховой линией.

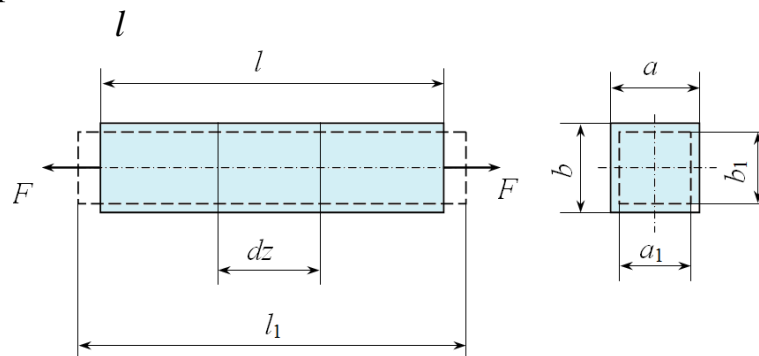


Рисунок 2.6 – Деформации растянутого стержня

Изменение длины стержня $\Delta l = l_1 - l$ называется его абсолютной продольной деформацией.

Вырежем мысленно бесконечно малый элемент бруса длиной dz . После приложения нагрузки он удлинится на величину Δdz . Продольные относительная и абсолютная деформации элемента

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz};$$

$$\Delta dz = \varepsilon dz.$$

Во всех точках бруса возникает одно и то же напряженное состояние, следовательно, для всех его точек $\varepsilon = \text{const}$. Абсолютное удлинение бруса составит

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dz = \varepsilon \int_0^l dz = \varepsilon l.$$

Откуда относительная продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.8)$$

Между напряжениями и деформациями существует зависимость, известная под названием закона Гука. Для растяжения (сжатия) она имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.9)$$

где E - модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

Модуль упругости первого рода характеризует жесткость материала. Для стали, например, $E = (2...2,1) \cdot 10^5$ МПа, для чугуна $E = (1,15...1,6) \cdot 10^5$ МПа.

Подставив в зависимость (2.9) значение нормального напряжения и относительной деформации из выражений (2.4) и (2.8) получим

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}.$$

Откуда абсолютная продольная деформация бруса

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.10)$$

Произведение EA называется жесткостью поперечного сечения бруса при растяжении (сжатии).

Зависимость (2.10) справедлива для участка бруса постоянного поперечного сечения A , в котором действует постоянная продольная сила N .

Если на участке продольная сила $N(z)$ и площадь поперечного сечения $A(z)$ переменные, тогда абсолютное удлинение участка длиной l определяется по формуле

$$\Delta l = \int \frac{N(z)dz}{EA(z)}. \quad (2.11)$$

Для случая, если продольная сила в пределах участка длиной l изменяется по линейному закону, и площадь сечения A постоянна, выражение (2.11) после интегрирования примет вид

$$\Delta l = \frac{(N_i + N_k)}{2EA} l, \quad (2.12)$$

где N_n ; N_k – соответственно начальное и конечное значения продольного усилия на границах участка стержня.

При растяжении (сжатии) в стержне кроме продольной возникает также поперечная деформация.

Относительная поперечная деформация бруса в направлении размеров a и b (см. рис. 2.6) соответственно будет

$$\begin{aligned}\varepsilon'_a &= \frac{\Delta a}{a}; \\ \varepsilon'_b &= \frac{\Delta b}{b},\end{aligned}$$

где $\Delta a = a_1 - a$, $\Delta b = b_1 - b$ – абсолютные поперечные деформации;
 a, b – начальные размеры сечения бруса;
 a_1, b_1 – конечные размеры.

Для изотропных материалов в любом направлении поперечные деформации одинаковы

$$\varepsilon'_a = \varepsilon'_b = \varepsilon'.$$

В пределах справедливости закона Гука при растяжении (сжатии) поперечные деформации пропорциональны продольным деформациям

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (2.13)$$

где μ - коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Знак “–” показывает, что увеличение продольных размеров бруса приводит к уменьшению поперечных размеров и наоборот.

Коэффициент Пуассона характеризует упругие свойства материалов и представляет собой отношение по модулю поперечной деформации к продольной

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.14)$$

Для разных материалов он имеет значение от 0 (пробковое дерево) до 0,5 (резина). Для стали коэффициент Пуассона равняется 0,25...0,3. Для чугуна, цинка, меди он имеет значение от 0,23 до 0,36.

В ряде случаев нормальная эксплуатация машин возможна при условии, когда абсолютные деформации ее элементов не превысят допустимых значений $[\Delta l]$, т.е. при эксплуатации должно выполняться неравенство

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \leq [\Delta l]. \quad (2.15)$$

Неравенство (2.15) представляет собой условие жесткости, а проведенные по нему расчеты являются расчетами на жесткость.

2.4 Механические свойства материалов. Испытания материалов на растяжение и сжатие

Работоспособность элементов конструкции зависит от механических свойств материалов, из которых они изготовлены.

Конструкционные материалы условно можно разделить на пластичные и хрупкие. К пластичным материалам относятся малоуглеродистые стали, алюминий, медь, свинец, латунь и др. Они допускают значительные деформации без разрушения.

Хрупкие материалы (высокоуглеродистые стали, чугун, стекло, металлокерамика, камень, бетон и т.п.) разрушаются без заметной деформации.

Малопластичные материалы (легированные стали, дюралюминий, бронза) занимают промежуточное положение.

Для определения механических характеристик проводят испытания материалов на растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб, твердость и др. Наиболее распространенными являются испытания на растяжение и сжатие при статической нагрузке. Их проводят на разрывных универсальных машинах с механическим или гидравлическим приводами.

Испытания на растяжение. Испытаниям подлежат цилиндрические или плоские образцы (рис. 2.7). Удлинение определяется по изменению расчетной длины l_0 .

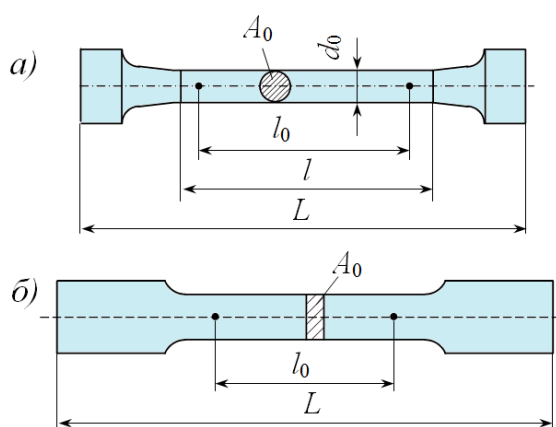


Рисунок 2.7 - Образцы для испытания на растяжение: а) – цилиндрический образец; б) – плоский образец

При растяжении образца регистрируют растягивающую силу F и удлинение Δl , по которым строится диаграмма растяжения в координатах сила – удлинение. На испытательных машинах такие диаграммы вычерчиваются автоматически.

Диаграмма для пластичной малоуглеродистой стали показана на рисунке 2.8.

На диаграмме можно выделить шесть участков.

Первый участок (OA) – зона упругих деформаций, в которой имеет место линейная зависимость между нагрузкой и удлинением, т.е. в пределах прямой OA справедлив закон Гука.

Второй участок (AB) – зона упругих деформаций, в которой зависимость между нагрузкой и удлинением нелинейна. К точке B деформации остаются упругими, т.е. при снятии нагрузки деталь восстанавливает свои размеры и форму.

Третий участок (BC) – участок, на котором появляются пластические деформации образца. Этот процесс называется текучестью материала. На этом участке имеет место нелинейная зависимость между нагрузкой и удлинением образца.

Четвертый участок (CD) – горизонтальный участок, на котором деформации возрастают без увеличения нагрузки. Этот участок называется площадкой текучести.

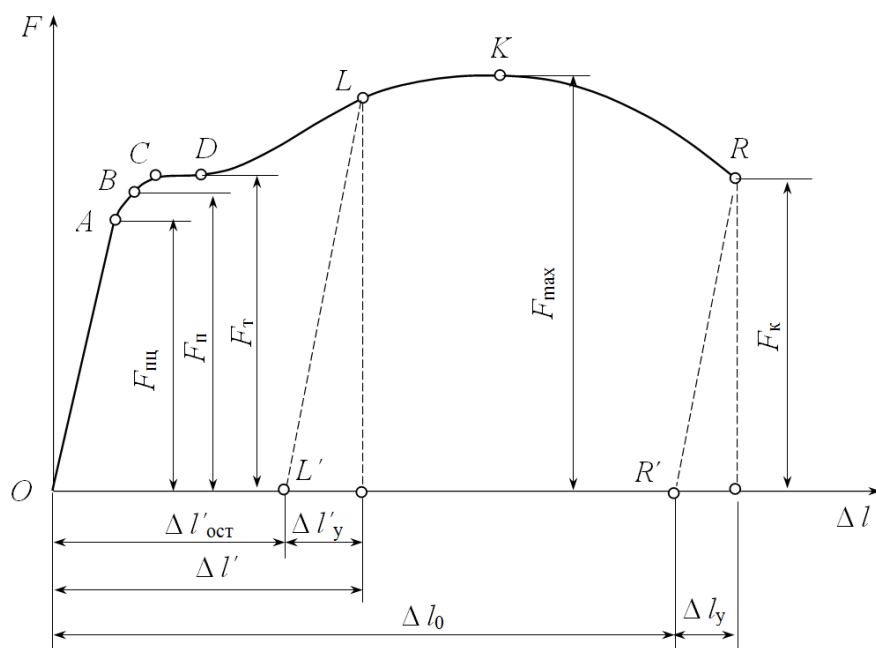


Рисунок 2.8 – Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Пятый участок (DK) – зона упрочнения. Если образец нагрузить силой, которая соответствует, например, точке L диаграммы, а потом снять нагрузку, то процесс разгрузки отображается прямой LL' , параллельной OA . Образец при этом будет иметь остаточную деформацию $\Delta l'_{ост}$. При повторной нагрузке процесс будет проходить по прямой $L'L$. При этом участок, в пределах которого справедлив закон Гука, увеличится ($L'L > OA$). Упругая деформация при этом составит $\Delta l'_y$. Явление упрочнения материала в результате удлинения материала за пределом текучести, называется наклёпом.

Шестой участок (KR) – местная текучесть. Деформация образца на этом участке характеризуется появлением шейки и удлинением образца за счет его утончения (рисунок 2.9). В точке R происходит разрушение образца.

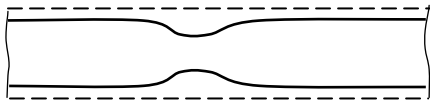


Рисунок 2.9 – Местная деформация образца

Остаточное удлинение образца после разрыва – Δl_0 , упругая деформация – Δl_y (см. рисунок 2.8).

Для исключения зависимости диаграммы растяжения от размеров образца ее перестраивают в координатах “напряжение - относительная деформация” по формулам:

$$\sigma = \frac{F}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Такая диаграмма называется диаграммой напряжений (рис. 2.10).

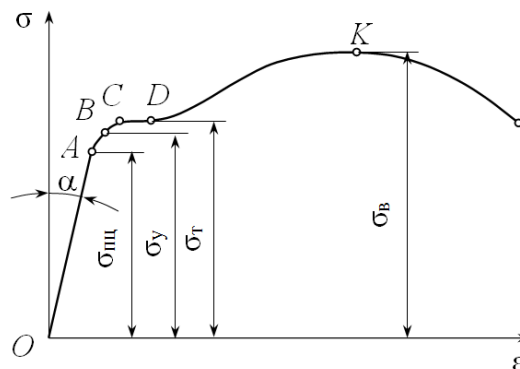


Рисунок 2.10 – Диаграмма напряжений малоуглеродистой стали при растяжении

Она имеет следующие характерные точки:

$\sigma_{пл}$ - предел пропорциональности (наибольшее напряжение, до которого выполняется закон Гука);

σ_y – предел упругости (наибольшее напряжение, при котором остаточная деформация не проявляется);

σ_T – предел текучести (напряжение, при котором происходит деформация без увеличения нагрузки);

σ_B – предел прочности или временное сопротивление (напряжение, соответствующее силе F_{max} , предшествующей разрушению образца).

При испытаниях на растяжение также определяют:

E – модуль упругости первого рода;

$$\dot{A} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.16)$$

где σ , ε – напряжение и относительная деформация образца, которые отвечают любой точке прямолинейного участка диаграммы (прямая OA);

α – угол наклона прямолинейного участка диаграммы к горизонтальной оси (см. рисунок 2.10);

ε – относительное остаточное удлинение после разрыва;

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100\% = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%, \quad (2.17)$$

где l_1 – длина образца после разрыва (измеряется путем состыковки двух частей разорванного образца);

ψ – относительное сужение после разрыва;

$$\psi = \frac{\Delta \dot{A}_0}{\dot{A}_0} \cdot 100\% = \frac{\dot{A}_0 - \dot{A}_1}{\dot{A}_0} \cdot 100\%, \quad (2.18)$$

где A_0 – начальная площадь поперечного сечения образца;

A_1 – площадь поперечного сечения в наиболее тонком месте шейки в районе разрыва.

К пластическим материалам относят материалы, в которых относительное остаточное удлинение после разрыва $\delta > 5\%$, к хрупким – материалы с $\delta < 5\%$.

Диаграмма растяжения хрупких материалов приведена на рис. 2.11. Для них отклонение от закона Гука начинается с малых значений растягивающей силы. Диаграмма не имеет площадки текучести. Образцы разрушаются при довольно малой остаточной деформации без образования шейки.

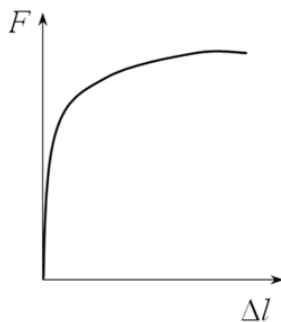


Рисунок 2.11 – Диаграмма растяжения среднеуглеродистой стали

Испытания на сжатие. На сжатие исследуются образцы в виде коротких цилиндров высотой $h \leq 3d$, или кубиков.

Диаграмма сжатия образца из пластичного материала приведена на рис. 2.12. В начале диаграмма сжатия практически совпадает с диаграммой

растяжения (линии $OABC$). После точки D поперечное сечение образца увеличивается, и сжимающая сила быстро возрастает.

Для малоуглеродистой стали механические характеристики (предел пропорциональности, упругости, текучести, модуль упругости I рода) совпадают.

Диаграмма сжатия образца из хрупкого материала приведена на рис. 2.13.

Как и при растяжении, диаграмма не имеет прямолинейного участка и площадки текучести. Однако, предел прочности при сжатии значительно выше, чем при растяжении. Для чугуна, например, предел прочности при сжатии в 3...4,5 раз выше, чем при растяжении. Хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем при растяжении.

Разрушение образца начинается с появления трещин, которые направлены под углом 45° к его продольной оси.

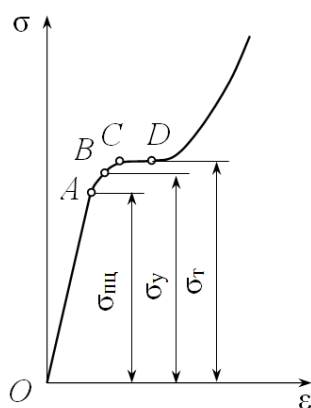


Рисунок 2.12 – Диаграмма напряжений малоуглеродистой стали при сжатии

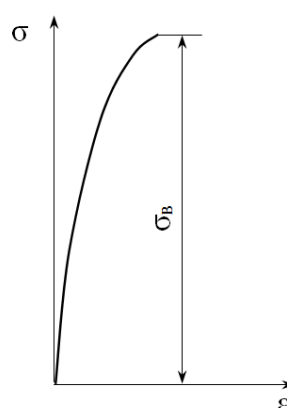


Рисунок 2.13 – Диаграмма напряжений чугуна при сжатии

Представление о свойствах малоуглеродистой стали и серого чугуна при растяжении и сжатии дают диаграммы на рис. 2.14.

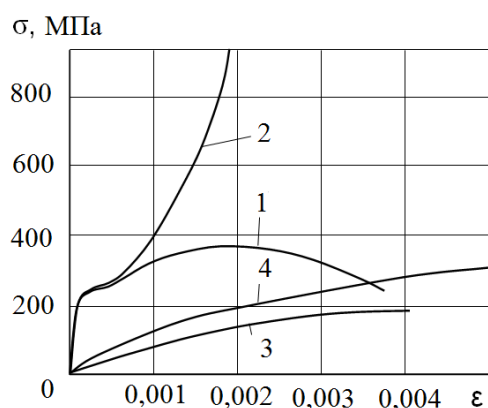


Рисунок 2.13 – Диаграмма напряжений:
1; 2 – малоуглеродистые стали, соответственно, при растяжении и сжатии;
3; 4 – серый чугун, соответственно, при растяжении и сжатии

Определение твердости. Под твердостью понимают способность материала противодействовать проникновению в него других тел.

Наибольшее распространение имеют испытания твердости по Бринеллю и Роквеллу. Сущность испытаний состоит во вдавливании под оп-

ределенной нагрузкой закаленного шарика (при испытаниях по Роквеллу) в исследуемый материал.

Величина, которая характеризует твердость, или число твердости по Бринеллю (HB), определяется по формуле

$$\hat{IA} = \frac{F}{10A_{\text{от}}}, \quad (2.19)$$

где F – нагрузка на шарик диаметром 10 мм, Н;

$A_{\text{от}}$ – площадь поверхности сферического отиска, мм².

Твердость, определяемая различными методами, с помощью специальных таблиц может быть приведена к твердости по Бринеллю.

Между твердостью и другими механическими характеристиками (пределами текучести, прочности) существует корреляционная зависимость. Например, для стали $\sigma_{\hat{a}} \cong 0,36 \hat{IA}$, для серого чугуна $\sigma_{\text{в}} \cong 0,17(HB - 10)$.

Испытания на твердость более просты, чем опыты на растяжение или сжатие, так как здесь не нужно мощных разрывных машин и специальных образцов. Испытаниям можно подвергать непосредственно детали изделий. Поэтому в некоторых случаях (особенно на производстве) испытания на твердость используют для оценки величины предела прочности.

2.5 Допускаемые напряжения при растяжении (сжатии)

Для пластичных материалов за величину опасных напряжений принимают предел текучести:

$$\sigma_{\text{ид}} = \sigma_{\text{от}}.$$

Допускаемые напряжения для пластичных материалов определяются по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{от}}}{[n_{\text{от}}]}, \quad (2.20)$$

где $[n_{\text{т}}]$ – коэффициент запаса по пределу текучести; как правило, $[n_{\text{т}}] = 1,5 \dots 2,5$.

Для хрупких материалов за величину опасных напряжений принимают предел прочности:

$$\sigma_{\text{ид}} = \sigma_{\hat{a}}.$$

Допускаемые напряжения для хрупких материалов определяют по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\hat{a}}}{[n_{\hat{a}}]}, \quad (2.21)$$

где $[n_B]$ - коэффициент запаса по пределу прочности; как правило, $[n_B] = 2,5 \dots 5$.

Пример 2.1. Стальной стержень (рис. 2.15) находится под действием силы F и собственного веса. Площадь поперечных сечений участков стержня A и $2A$.

Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; удельный вес стали $\gamma = 77$ кН/м³. Числовые значения величин: $a = 2$ м; $b = 4,5$ м; $c = 1$ м; $F = 1,4$ кН; $A = 16$ см².

Необходимо:

- написать для каждого участка аналитические выражения продольных сил N и нормальных напряжений σ от текущей координаты z ;
- построить эпюры N и σ ;
- определить перемещение нижнего конца стержня.

Решение. Схема стержня с соблюдением масштаба для вертикальных размеров вдоль продольной оси приведена на рис. 2.15, а. Направим ось z вдоль продольной оси стержня. Начало координат примем на свободном конце стержня.

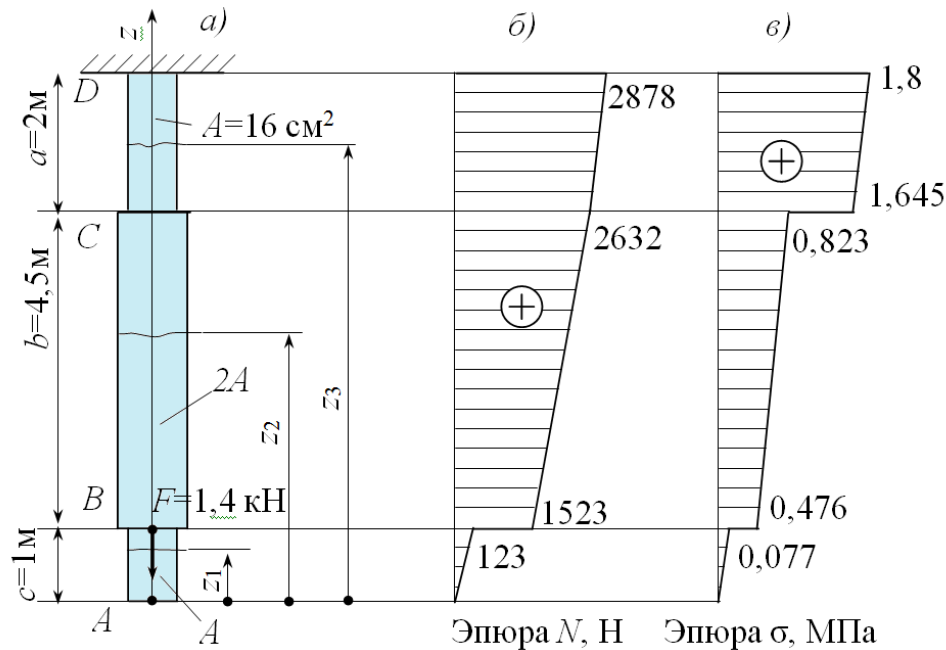


Рисунок 2.15 – Расчетная схема стержня, эпюры продольных усилий и нормальных напряжений

Аналитические выражения для продольных сил N и нормальных напряжений σ .

Разобьем стержень на три участка: AB , BC и CD .

Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние нагрузки или изменяются размеры сечений стержня.

Методом сечений определим внутренние продольные силы на участках стержня.

Участок AB . Для сечения с координатой z_1 ($0 \leq z_1 \leq c = 1$ м) продольная сила равняется

$$N_1 = \gamma A z_1;$$

На стержень ниже сечения z_1 действует только вес γAz_1 части участка AB стержня длиной z_1 .

Нормальное напряжение

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{\gamma Az_1}{A} = \gamma z_1 ;$$

Аналитические выражения продольной силы N_1 и нормальных напряжений σ_1 представляют собой уравнения прямых. Для их построения определяют значения N_1 и σ_1 на границах участков.

При $z_1 = 0$ (сечение A) $N_A = 0$; $\sigma_A = 0$.

При $z_1 = 1$ м (сечение B)

$$N_B = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 123 \text{ Н.}$$

Здесь 10^3 и 10^{-4} – переводные коэффициенты для перевода соответственно кН/м³ в Н/м³ и см² в м².

$$\sigma_B = 77 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^3 = 0,077 \text{ МПа.}$$

Здесь 10^{-6} и 10^3 – переводные коэффициенты для перевода соответственно кН/м³ в Н/мм³ и м в мм.

Участок BC . Для сечения с координатой z_2 ($1 \text{ м} \leq z_2 \leq 5,5 \text{ м}$) продольная сила N_2 и нормальные напряжения σ_2 :

$$N_2 = \gamma A \tilde{n} + F + \gamma 2A(z_2 - \tilde{n}) ;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} .$$

При $z_2 = c = 1$ м (сечение B)

$$N_B = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 + 1,4 \cdot 10^3 = 1523 \text{ Н;}$$

$$\sigma_B = \frac{1523}{2 \cdot 16 \cdot 10^2} = 0,476 \text{ МПа.}$$

При $z_2 = 5,5$ м (сечение C)

$$N_C = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 + 1,4 \cdot 10^3 + 77 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-4} (5,5 - 1) = 2632 \text{ Н;}$$

$$\sigma_C = \frac{2632}{2 \cdot 16 \cdot 10^2} = 0,823 \text{ МПа.}$$

Участок CD . Для сечения с координатой z_3 ($5,5 \text{ м} \leq z_3 \leq 7,5 \text{ м}$) продольная сила N_3 и нормальное напряжение σ_3

$$N_3 = \gamma Ac + F + \gamma 2Ab + \gamma A(z_3 - \hat{a} - \tilde{n}) ;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} .$$

При $z_3 = 5,5$ м (сечение C)

$$N_C = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 + 1,4 \cdot 10^3 + 77 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 4,5 = 2632 \text{ Н;}$$

$$\sigma_C = \frac{2632}{16 \cdot 10^2} = 1,645 \text{ МПа.}$$

При $z_3 = 7,5$ м (сечение D)

$$N_D = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 + 1,4 \cdot 10^3 + 77 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 4,5 + \\ + 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} (7,5 - 4,5 - 1) = 2878 \text{ Н;}$$

$$\sigma_D = \frac{2878}{16 \cdot 10^2} = 1,8 \text{ МПа.}$$

Построение эпюр продольных сил и нормальных напряжений. По числовым значениям на границах участков стержня строим в масштабе эпюру продольных сил N (рис. 2.15, б) и нормальных напряжений σ (рисунок 2.15, в). Прямые, очерчивающие эпюру нормальных сил на участках AB и CD эпюру напряжений на всех участках, имеют одинаковый наклон к нулевой линии.

Перемещение нижнего конца стержня равняется удлинению от действия силы F и собственного веса

$$\delta = \Delta l_{\hat{A}\hat{A}} + \Delta l_{\hat{A}\hat{N}} + \Delta l_{CD},$$

где $\Delta l_{\hat{A}\hat{A}}$, $\Delta l_{\hat{A}\hat{N}}$, Δl_{CD} – удлинение участков стержня.

Удлинение участков стержня

$$\Delta l_{AB} = \frac{(N_A + N_B)c}{2EA} = \frac{(0 + 123) \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 1,92 \cdot 10^{-7} \text{ м;}$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{(N_B + N_C)b}{2E \cdot 2A} = \frac{(1523 + 2632) \cdot 4,5}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ м;}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{(N_C + N_D)c}{2EA} = \frac{(2632 + 2878) \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ м;}$$

$$\delta = 1,92 \cdot 10^{-7} + 1,46 \cdot 10^{-5} + 1,72 \cdot 10^{-5} = 3,20 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,032 \text{ мм.}$$

2.6 Расчет статически неопределимых систем на растяжение (сжатие)

Инженерные конструкции в зависимости от метода расчета усилий в элементах разделяют на статически определимые и статически неопределимые. В статически определимых конструкциях внутренние усилия в их элементах могут быть определены из уравнений статики.

В статически неопределимых конструкциях неизвестных усилий больше, чем уравнений статики. Поэтому статические уравнения дополняют уравнениями, учитывающими условия деформации конструкций.

Рассмотрим расчет статически неопределимых конструкций на примере стального стержня постоянного поперечного сечения с площадью A и длиной l с заземленными обоими концами и нагруженного продольной силой F (рис. 2.16).

Под действием силы F в заземлениях стержня возникают реакции R_A и R_B .

Из условий равновесия (суммы проекций сил на ось z) имеем

$$F = R_A + R_B. \quad (2.22)$$

Для определения двух неизвестных (R_A и R_B) нужно составить еще одно уравнение. Для этого отбросим заземление и заменим его действие силой R_B .

От действия силы F удлинение участка длиной a будет $\frac{Fa}{EA}$, а от действия силы R_B удлинение всего стержня уменьшится на величину $\frac{R_B l}{EA}$ (см. формулу 2.10).

В действительности оба конца стержня заземлены и его длина не изменяется, т.е. удлинение от силы F равняется укорочению от силы R_B :

$$\frac{Fa}{EA} = \frac{R_B l}{EA}.$$

Отсюда опорная реакция

$$R_B = F \frac{a}{l}.$$

Из уравнения (2.22) определим вторую опорную реакцию

$$R_A = F - R_B = F \frac{b}{l}.$$

После определения реакций расчет внутренних усилий проводится так же, как и для статически определимого стержня. Эпюра продольных сил показана на рис. 2.16, б.

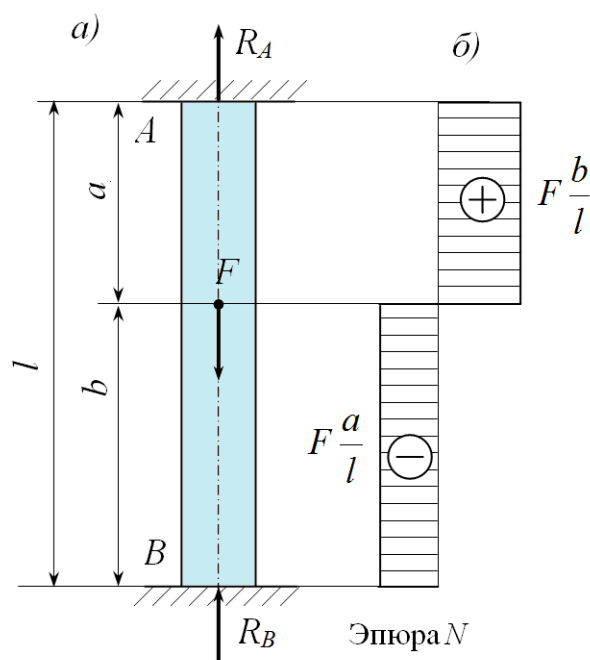


Рисунок 2.16 – Статически неопределимая система: *a* – расчетная схема; *б* – эпюра продольных сил

3 СДВИГ

3.1 Понятие о сдвиге

Сдвиг – вид сопротивления стержня, когда в его поперечных сечениях возникает только поперечная сила.

Деформация сдвига в металлах называется срезом, в камне и дереве – скалыванием.

Сдвиг вызывается действием на стержень двух равных противоположно направленных поперечных сил, расположенных на малом расстоянии одна от одной (рис. 3.1).

Деформации сдвига испытывают заклепки, болты, установленные без зазора, шпонки, швы сварных соединений, прутки и листы при резании их ножницами.

Сдвиг в чистом виде получить трудно, так как он сопровождается другими видами деформаций (как правило, изгибом). Однако в расчетах встречаются случаи нагружения, когда на четырех гранях элементарного прямоугольного элемента, выделенного вокруг некоторой точки сечения стержня, действуют только касательные напряжения. Такой вид деформации называют чистым сдвигом.

Примером деформации чистого сдвига является кручение тонкостенной трубы (рис. 3.2). При кручении ее образующие наклоняются из-за относительного поворота поперечных сечений стержня, а стенки трубы испытывают деформацию сдвига.

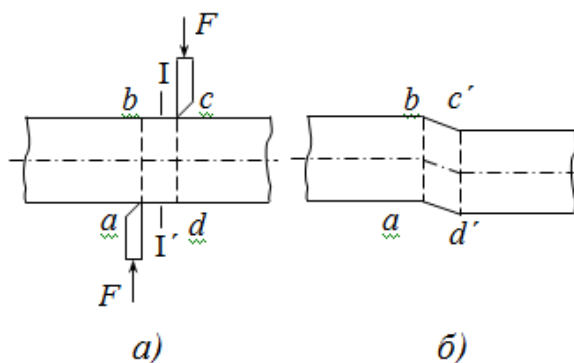


Рисунок 3.1 – Разрезание бруса
a – расчетная схема; *б* – деформированное состояние бруса

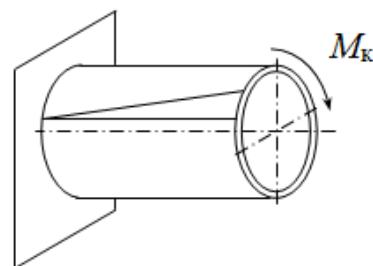


Рисунок 3.2 – Чистый сдвиг
 при кручении тонкостенной трубы

3.2 Касательные напряжения. Условие прочности

На участке бруса между силами F в произвольном сечении $I - I'$ (см. рис. 3.1, *a*) действует поперечная сила Q , которая определяется по методу сечений и равняется

$$Q = F. \quad (3.1)$$

Поперечная сила Q является равнодействующей элементарных касательных сил τdA , которые действуют в поперечном сечении (см. формулу (1.4)).

Для определения касательных напряжений по известному значению поперечной силы необходимо знать закон их распределения по сечению стержня. Обычно принимается, что напряжения распределяются равномерно. Тогда после интегрирования из (1.4) получим формулу для определения касательных напряжений

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}, \quad (3.2)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

При сдвиге заклепочных соединений, болтов, шпонок и других деталей кроме касательных напряжений в сечениях из-за изгиба возникают нормальные напряжения. Однако, если нормальные напряжения значительно меньше касательных, то в приближенных расчетах учитывают только касательные напряжения и расчет проводят как для случая чистого сдвига.

Условие прочности при сдвиге

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau_c], \quad (3.3)$$

где $[\tau_c]$ – допускаемое напряжение материала на сдвиг.

Обычно допускаемое напряжение на сдвиг принимается как часть допускаемого напряжения на растяжение:

- для пластичных материалов $[\tau_c] = (0.5 \dots 0.6) [\sigma]$;
- для хрупких материалов $[\tau_c] = (0.7 \dots 1.0) [\sigma]$.

4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

При расчетах на кручение, изгиб, сложное сопротивление и устойчивость используются геометрические характеристики сечений: статические моменты, моменты инерции, моменты инерции, моменты сопротивления, радиусы инерции, которые зависят от формы, размеров сечений и от положения осей и точек (полюсов), относительно которых они вычисляются.

4.1 Статические моменты

Площадь плоских сечений. Площадь, ограниченная произвольной кривой (рис. 4.1)

$$A = \int_A dA. \quad (4.1)$$

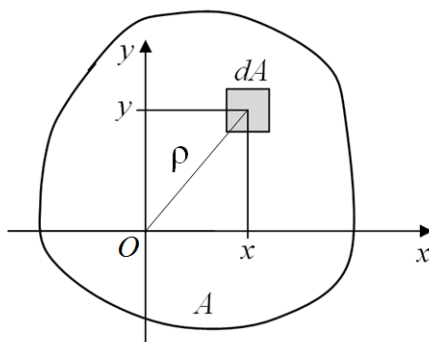


Рисунок 4.1 – Сечение произвольной формы

Для вычисления геометрических характеристик сложных сечений, состоящих из простейших фигур, они разбиваются на конечное число n простейших частей. В этом случае площадь сечения

$$A = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (4.2)$$

Отметим два свойства: площадь всегда положительна и не зависит от выбора системы координат.

Статическим моментом плоского сечения относительно оси x или y называется, сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния до оси, взятая по всей площади сечения A (см. рис. 4.1):

- статический момент относительно оси x

$$S_x = \int_A y dA ; \quad (4.3)$$

- статический момент относительно оси y

$$S_y = \int_A x dA . \quad (4.4)$$

Координаты центра тяжести (точки C) плоского сечения

$$x_c = \frac{S_y}{A} ; \quad y_c = \frac{S_x}{A} . \quad (4.5)$$

Статический момент сложного сечения относительно оси равен сумме статических моментов всех частей сечения относительно этой оси

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i y_i = \sum_{i=1}^n S_{xi} ; \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i x_i = \sum_{i=1}^n S_{yi} , \quad (4.6)$$

где A_1, A_2, \dots, A_n – площади простых частей, составляющих сечение;

$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ – координаты центров тяжести простых частей относительно осей x и y .

Выведем зависимости между статическими моментами сечения при параллельном переносе осей (рис. 4.2). Статический момент относительно осей x_1 и y_1

$$S_{x1} = \int_A y_1 dA = \int_A (y - b) dA = \int_A y dA - \int_A b dA = S_x - bA ;$$

$$S_{y1} = \int_A x_1 dA = \int_A (x - a) dA = \int_A x dA - \int_A a dA = S_y - aA .$$

Или

$$S_{x1} = S_x - b A ; \quad S_{y1} = S_y - a A , \quad (4.7)$$

где $a; b$ – параметры; показаны на рис. 4.2.

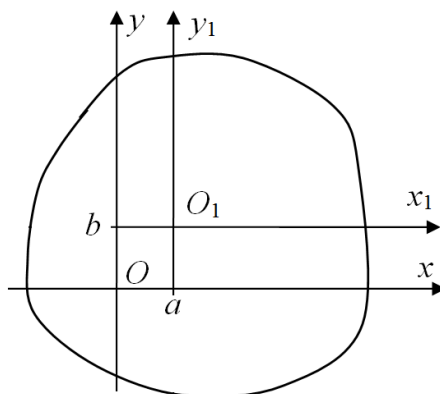


Рисунок 4.2 – Параллельный перенос осей

Статические моменты инерции имеют размерность м^3 .

Свойства статических моментов:

- изменение положительного направления оси y вызывает изменение знака статического момента S_x ; аналогично, изменение положительного направления оси x вызывает изменение знака статического момента S_y ;
- статический момент сечения равен нулю относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения;
- если плоское сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда проходит через центр тяжести плоского сечения;
- если плоское сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести сечения лежит на пересечении этих осей симметрии.

Оси называются **центральными**, если они проходят через центр тяжести сечения; статические моменты относительно этих осей равны нулю.

Пример 4.1. Определить статический момент полукруга радиусом R относительно оси x , совпадающей с диаметром, и координату центра тяжести y_c (рис. 4.3).

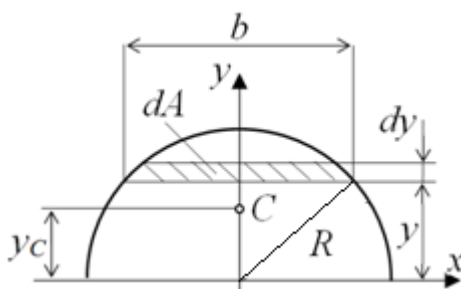


Рисунок 4.3 – Полуциркулярное сечение

Решение. Выделим на полукруге на расстоянии y элементарную площадку dA с помощью двух хорд, параллельных оси x , на расстоянии dy друг от друга. Площадь элементарной площадки

$$dA = b dy = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy.$$

Статический момент

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^R y \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2} dy = \int_0^R 2y\sqrt{R^2 - y^2} dy.$$

Выполним замену переменной

$$t = y^2; \quad dt = (y^2)' dy = 2y dy.$$

$$S_x = \int_0^{R^2} \sqrt{R^2 - t} dt = -\frac{(R^2 - t)^{1,5}}{1,5} \Big|_0^{R^2} = \frac{2}{3} R^3.$$

Координата центра тяжести сечения

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,424R.$$

Пример 4.2. Определить координату центра тяжести y_c треугольника с основанием b и высотой h относительно оси x , совпадающей с основанием треугольника (рис. 4.4).

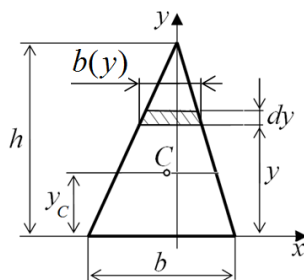


Рисунок 4.4 – Треугольное сечение

Решение. Выделим на расстоянии y от основания треугольника элементарную площадку dA с помощью двух линий, параллельных оси x , на расстоянии dy друг от друга. Площадь элементарной площадки

$$dA = b(y)dy = \frac{h-y}{h} b dy = \left(1 - \frac{y}{h}\right) b dy.$$

Статический момент

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^h y \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) b dy = \int_0^h yb dy - \int_0^h \frac{y^2}{h} b dy = \frac{by^2}{2} \Big|_0^h - \frac{by^3}{3h} \Big|_0^h = \frac{bh^2}{6}.$$

Координата центра тяжести сечения

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}.$$

4.2 Моменты инерции

Осевым моментом инерции сечения относительно оси x или y называется, сумма произведений площадей элементарных площадок dA на квадрат их расстояния до оси, взятая по всей площади сечения A (см. рис. 4.1)

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA. \quad (4.8)$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно осей x и y называется, сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния до осей, взятая по всей площади сечения A (см. рис. 4.1)

$$J_{xy} = \int_A xy dA. \quad (4.9)$$

Момент инерции сложного сечения относительно оси равен сумме моментов инерции всех частей этого сечения относительно этой оси, что непосредственно следует из свойств определенного интеграла

$$J_x = \sum_{i=1}^n A_i y_i^2 = \sum_{i=1}^n J_{xi}; \quad J_y = \sum_{i=1}^n A_i x_i^2 = \sum_{i=1}^n J_{yi}; \quad J_{xy} = \sum_{i=1}^n A_i x_i y_i = \sum_{i=1}^n J_{xyi}, \quad (4.10)$$

где A_1, A_2, \dots, A_n – площади простых частей, составляющих сечение;

$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ – координаты центров тяжести простых частей относительно осей x и y .

Зависимости между моментами инерции сечения при параллельном переносе осей (см. рис. 4.2)

$$J_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y-b)^2 dA = \int_A (y^2 - 2by + b^2) dA = \int_A y^2 dA - 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA = J_x - 2bS_x + b^2 A;$$

$$J_{y1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x-a)^2 dA = \int_A (x^2 - 2ax + a^2) dA = \int_A x^2 dA - 2a \int_A x dA + a^2 \int_A dA = J_y - 2aS_y + a^2 A;$$

$$\begin{aligned} J_{x1y1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x-a)(y-b) dA = \int_A (xy - ay - bx + ab) dA = \\ &= \int_A xy dA - a \int_A y dA - b \int_A x dA + ab \int_A dA = J_{xy} - aS_x - bS_y + abA. \end{aligned}$$

Если x и y оси центральные, то $S_x = 0$ и $S_y = 0$, тогда

$$J_{x_1} = J_x + b^2 A; \quad J_{y_1} = J_y + a^2 A; \quad J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abA. \quad (4.11)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно полюса O называется, сумма произведений площадей элементарных площадок dA на квадрат их расстояния до полюса, взятая по всей площади сечения A (см. рис. 4.1)

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (4.12)$$

Установим зависимость между полярным и осевыми моментами инерции

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_x + J_y,$$

или

$$J_p = J_x + J_y. \quad (4.13)$$

Зависимость (4.13) называется условием инвариантности, которое формулируется следующим образом: *сумма осевых моментов инерции относительно двух любых взаимно перпендикулярных осей есть величина постоянная и равная полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей.*

Осевой и полярный моменты инерции имеют размерность м^4 .

4.3 Изменение моментов инерции сечения при повороте осей координат

Определим зависимость между моментами инерции относительно осей x, y и моментами инерции относительно осей x_1, y_1 , повернутых на угол α . Пусть $J_x > J_y$ и положительный угол α отсчитывается от оси x против часовой стрелки (рис. 4.5).

Пусть координаты точки M до поворота – x, y , после поворота – x_1, y_1 . Из рисунка следует

$$\begin{aligned} x_1 &= OA + AB + BC = ON \cos \alpha + BN \sin \alpha + MN \sin \alpha = \\ &= ON \cos \alpha + (BN + MN) \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \end{aligned}$$

$$y_1 = DO \cos \alpha = (EO - DE) \cos \alpha = (y - x \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Или

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

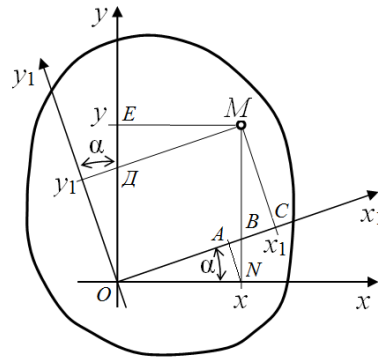


Рисунок 4.5 – Поворот осей

Моменты инерции относительно осей x_1 и y_1

$$\begin{aligned}
 J_{x_1} &= \int_A y^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \int_A (y^2 \cos^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + x^2 \sin^2 \alpha) dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - \sin 2\alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA = J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha ;
 \end{aligned}$$

или

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha ; \quad (4.14)$$

аналогично

$$J_{y_1} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha ; \quad (4.15)$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha . \quad (4.16)$$

Сложив уравнения (4.15) и (4.16), получим

$$\begin{aligned}
 J_{x_1} + J_{y_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha = \\
 &= J_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J_x + J_y ,
 \end{aligned}$$

т.е. сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей остается постоянной и не изменяется при повороте системы координат (условие инвариантности).

4.4 Главные оси инерции и главные моменты инерции

С изменением угла поворота осей α величины J_{x_1} и J_{y_1} изменяются, но сумма их остается неизменной. Существует такое значение $\alpha = \alpha_0$, при котором моменты инерции достигают экстремальных значений, т.е. один из моментов инерции принимает максимальное значение, а другой - минимальное значение.

Для нахождения значения α_0 возьмем первую производную от J_{x_1} (или J_{y_1}) и приравняем ее нулю

$$\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} = -2J_x \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2J_y \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 - J_{xy} \cos 2\alpha_0 = (J_x - J_y) \sin 2\alpha_0 - 2J_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (4.17)$$

Покажем, что относительно полученных осей центробежный момент инерции равен нулю. Для этого центробежный момент инерции по формуле (4.17) приравняем нулю

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha - J_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

Откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Из сравнения полученного результата с (4.17) следует, что $\alpha = \alpha_0$ относительно осей x_1 и y_1 центробежный момент инерции равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются **главными осями**.

Если эти оси являются центральными, то они называются **главными центральными осями**.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**.

Обозначим главные центральные оси через u и v . Тогда

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0; \\ J_v &= J_x \sin^2 \alpha_0 + J_y \cos^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0; \\ J_{uv} &= 0. \end{aligned}$$

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции сечения.

Для фигур, имеющих более двух осей симметрии, осевые моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой. К таким фигурам относятся равносторонний треугольник, квадрат, круг и др..

4.5 Моменты сопротивления

Осевой момент сопротивления относительно оси – величина, равная отношению момента инерции относительно оси к расстоянию до наиболее удаленной от этой оси точки сечения

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}. \quad (4.18)$$

Полярный момент сопротивления относительно полюса – величина, равная отношению момента инерции относительно полюса к расстоянию до наиболее удаленной от полюса точки сечения

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}. \quad (4.19)$$

Осевой и полярный моменты сопротивления имеют размерность м^3 .

4.6 Радиус инерции сечения

Радиус инерции сечения – геометрическая характеристика сечения, связывающая осевые моменты инерции фигуры с площадью формулами

$$A = i_x^2 J_x; \quad A = i_y^2 J_y.$$

Отсюда, формула радиуса инерции

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}. \quad (4.20)$$

4.7 Моменты инерции простых фигур

Осевой момент инерции прямоугольного сечения относительно главных центральных осей x, y (рис. 4.6, а). Выделим элементарную площадку высотой dy с координатой y .

Ее площадь

$$dA = bdy.$$

Подставим последнюю зависимость в (4.9) и изменив пределы интегрирования, получим момент инерции сечения относительно оси x

$$J_x = \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy = \frac{bh^3}{12},$$

или

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.21)$$

Аналогично, момент инерции сечения относительно оси y

$$J_y = \frac{b^3h}{12}. \quad (4.22)$$

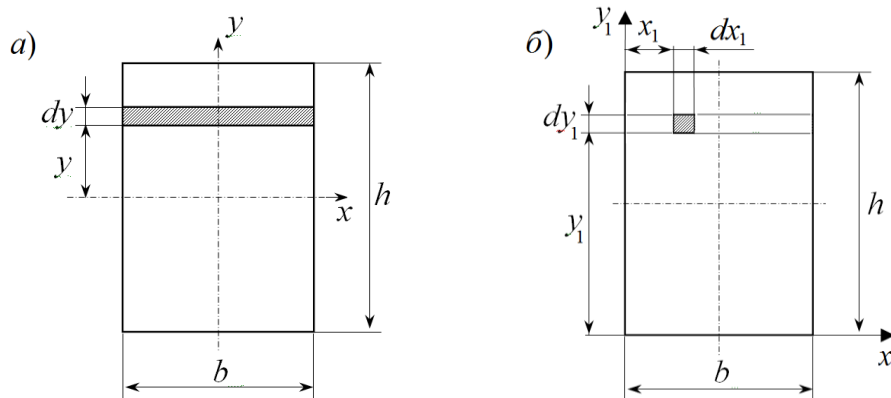


Рисунок 4.6 – Прямоугольное сечение

Осейвой момент сопротивления сечения относительно оси x с учетом, что $y_{\max} = h/2$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{b \frac{h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6},$$

или

$$W_x = \frac{bh^2}{6}. \quad (4.23)$$

Аналогично, осевой момент сопротивления сечения относительно оси y с учетом, что $x_{\max} = b/2$

$$W_y = \frac{b^2h}{6}. \quad (4.24)$$

Центробежный момент инерции прямоугольного сечения относительно осей x_1, y_1 , совпадающих с основанием и боковой стороной прямоугольника (рис. 4.6, б). Выделим из прямоугольника линиями, параллельными осям элементарную площадку. Центробежный момент инерции элементарной горизонтальной полоски высотой dy_1 и шириной b , расположенной на расстоянии y_1 от оси

$$dJ_{x_1 y_1} = \int_{b dy_1} x_1 y_1 dA = \int_0^b x_1 y_1 dx_1 dy_1 = y_1 dy_1 \int_0^b x_1 dx_1 = y_1 dy_1 x_1^2 \Big|_0^b = y_1 dy_1 \frac{b^2}{2}.$$

Произведение $y_1 dy_1$ вынесено за знак интеграла, так как для всех площадок рассматриваемой горизонтальной полоски оно постоянно. Проинтегрируем последнее выражение по площади всего сечения

$$J_{x_1 y_1} = \int_A dJ_{x_1 y_1} = \int_0^h \frac{b^2}{2} y_1 dy_1 = \frac{b^2}{4} y_1^2 \Big|_0^h = \frac{b^2 h^2}{4},$$

или

$$J_{x_1 y_1} = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Полярный момент инерции круглого кольцевого сечения с внешним диаметром D и внутренним d (рис. 4.7).

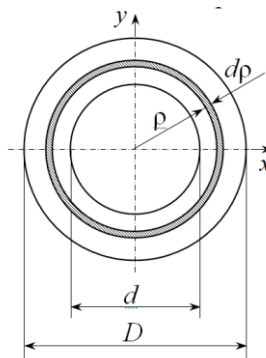


Рисунок 4.7 – Круглое кольцевое сечение

Выделим элементарное кольцо с радиусом ρ и шириной $d\rho$. Площадь элементарного кольца

$$dA = 2\pi\rho d\rho.$$

Подставив это значение в (4.12) и интегрируя по площади сечения (от $d/2$ до $D/2$), получим

$$J_p = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_{d/2}^{D/2} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4),$$

или

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \quad (4.25)$$

Для круга $d = 0$, поэтому

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (4.26)$$

Полярный момент сопротивления получим по формуле (4.25), поделив значение полярного момента инерции на максимальный радиус сечения $\rho_{\max} = D/2$

$$W_p = \frac{\pi D^4 / 32 (1 - d^4 / D^4)}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \quad (4.27)$$

Аналогично для круга

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Осевой момент инерции круглого кольцевого сечения с внешним диаметром D и внутренним d (см. рис. 4.7). Так как оси x и y равнозначны, то с учетом условия инвариантности (4.13) и зависимости (4.25)

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4). \quad (4.28)$$

Осевой момент инерции треугольного сечения с основанием b и высотой h (рис. 4.8). Выделим элементарную площадку высотой dy с координатой y . Ее площадь

$$dA = b(y)dy = \frac{h-y}{h} b dy.$$

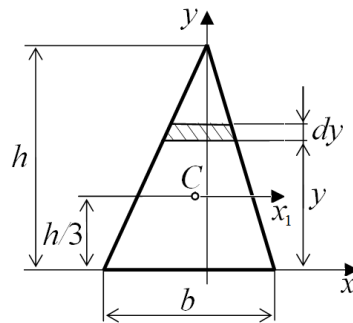


Рисунок 4.8 – Треугольное сечение

Подставим последнюю зависимость в (4.9) и изменив пределы интегрирования, получим момент инерции сечения относительно оси x , совпадающей с основанием треугольника

$$J_x = \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) b y^2 dy = \int_0^h b y^2 dy - \int_0^h \frac{y^3}{h} b dy = \frac{b y^3}{3} \Big|_0^h - \frac{b y^4}{4h} \Big|_0^h = \frac{b h^3}{12},$$

или

$$J_x = \frac{b h^3}{12}. \quad (4.29)$$

Момент инерции сечения относительно центральной оси x_1 , параллельной основанию треугольника по формуле параллельного переноса осей

$$J_{x_1} = J_x - y_C^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.30)$$

4.8 Геометрические характеристики сечений сложной формы

Ниже приводится алгоритм определения положения главных центральных осей, величин главных центральных моментов инерции и моментов сопротивления сложного сечения, состоящего из нескольких простых частей:

- вычертить сечение и разбить на элементы, геометрические характеристики которых могут быть вычислены по элементарным формулам или известны; элементы пронумеровать $i = 1, 2, 3 \dots n$ (где i – индекс элемента; n – количество элементов);

- произвольно задать прямоугольную систему осей x, y ; для упрощения вычислений оси провести через центр тяжести одного или нескольких элементов сечения;

- определить для элементов сечения координаты x_{Ci}, y_{Ci} центров тяжести относительно осей x_i, y_i ;

- определить координаты x_C, y_C центра тяжести всего сечения относительно осей x, y по формулам

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i};$$

- провести центральные оси x_C, y_C (оси проходящие через центр S тяжести всего сечения);

- определить координаты центров тяжести элементов и сечения относительно центральных осей x_C, y_C ; для контроля правильности определения координат центров тяжести сечения и его элементов вычислить статические моменты сечения относительно центральных осей, которые при правильном расчете должны равняться нулю;

- определить геометрические характеристики сечения относительно центральных осей: осевые, полярный и центробежный моменты инерции;

- определить положение главных центральных осей (угол α_0 между осями u_C и u); положительный угол α_0 откладывается против хода часовой стрелки, отрицательный – по ходу часовой стрелки;

- определить главные центральные моменты инерции и моменты сопротивления.

Пример 4.3. Определить момент инерции составного сечения относительно оси симметрии (рис. 4.9); $a = 10$ см.

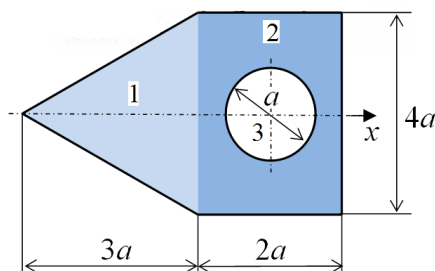


Рис. 4.9 – Составное сечение

Решение. Разбиваем сечение на элементы: 1 - равнобедренный треугольник, 2 - прямоугольник, 3 – круг (где 1; 2; 3 – индексы элементов).

Определим моменты инерции элементов относительно оси x .

Равнобедренный треугольник состоит из 2 прямоугольных треугольников с основанием $b_1 = 3a$ и высотой $h_1 = 2a$. Суммарный момент инерции прямоугольных треугольников

$$J_x^{(1)} = 2 \cdot \frac{b_1 h_1^3}{12} = 2 \cdot \frac{3a \cdot (2a)^3}{12} = 4a^4.$$

Момент инерции прямоугольника с основанием $b_2 = 2a$ и высотой $h_2 = 4a$

$$J_x^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} = 10,67a^4.$$

Момент инерции круга диаметром $d = a$

$$J_{x \ x3}^{(3)} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi a^4}{64} = 0,49a^4.$$

Момент инерции сечения относительно оси x

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} - J_x^{(3)} = (4 + 10,67 - 0,049)a^4 = 14,62a^4 = 146210 \text{ см}^4.$$

Пример 4.4. Определить момент инерции таврового сечения относительно центральных осей x_C и y_C (рис. 4.10).

Решение. Разбиваем сечение на элементы: 1 - прямоугольник с основанием $b_1 = 12$ см и высотой $h_1 = 2$ см, 2 - прямоугольник с основанием $b_2 = 2$ см и высотой $h_2 = 12$ см.

Через центры тяжести элементов C_1 и C_2 проводим оси x_{C1} , x_{C2} . Ось y_C проводим по оси симметрии сечения.

Площади элементов

$$A_1 = b_1 h_1 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ см}^2; \quad A_2 = b_2 h_2 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см}^2.$$

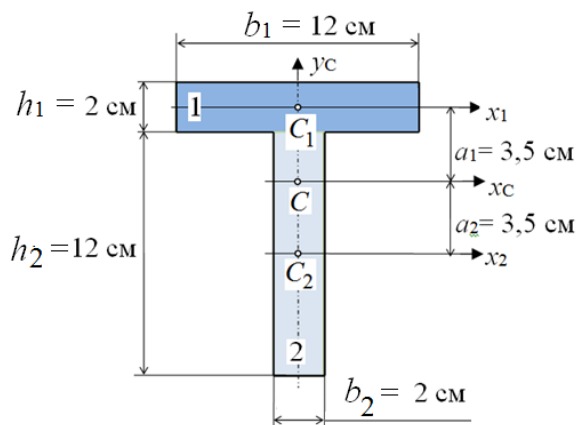


Рисунок 4.10 – Тавровое сечение

Определим центр тяжести сечения относительно осей x_{C2} , y_C . Координата $x_{C2} = 0$, так как сечение имеет ось симметрии, совпадающую с осью y_C . Координата y_{C2}

$$y_{C2} = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i y_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{A_1 \cdot 0 + A_2 (h_1 / 2 + h_2 / 2)}{A_1 + A_2} = \frac{24 \cdot 0 + 24(2 / 2 + 12 / 2)}{24 + 24} = 3,5 \text{ см.}$$

Через центр тяжести сечения C с координатами $x_{C2} = 0$ и $y_{C2} = 3,5$ см проводим центральную ось x_C .

Расстояния от центров тяжести элементов до оси x_C

$$a_1 = h_1 / 2 + h_2 / 2 - y_{C2} = 2 / 2 + 12 / 2 - 3,5 = 3,5 \text{ см}; \quad a_2 = y_{C2} = 3,5 \text{ см.}$$

Моменты инерции элементов и сечения относительно центральной оси x_C

$$J_{x_C}^{(1)} = J_x^{(1)} + a_1^2 A_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A_1 = \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 3,5^2 \cdot 24 = 302 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_C}^{(2)} = J_x^{(2)} + a_2^2 A_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 A_2 = \frac{2 \cdot 12^3}{12} + 3,5^2 \cdot 24 = 582 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_C} = J_{x_C}^{(1)} + J_{x_C}^{(2)} = 302 + 582 = 884 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции элементов и сечения относительно центральной оси y_C

$$J_{y_C}^{(1)} = \frac{b_1^3 h_1}{12} = \frac{12^3 \cdot 2}{12} = 288 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C}^{(2)} = \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{2^3 \cdot 12}{12} = 8 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C} = J_{y_C}^{(1)} + J_{y_C}^{(2)} = 288 + 8 = 296 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции относительно осей x_C и y_C равен нулю, так как ось инерции y_C является главной осью (осью симметрии сечения).

Пример 4.5. Определить полярный момент инерции сечения прямоугольной формы относительно центра тяжести, если ширина сечения $b = 8$ см, высота сечения $h = 24$ см.

Решение. Моменты инерции сечения относительно горизонтальной x и вертикальной y центральных осей инерции

$$J_x = \frac{b h^3}{12} = \frac{8 \cdot 24^3}{12} = 9216 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{b^3 h}{12} = \frac{8^3 \cdot 24}{12} = 1024 \text{ см}^4.$$

Полярный момент инерции прямоугольника относительно центра тяжести

$$J_p = J_x + J_y = 9216 + 1024 = 10240 \text{ см}^4.$$

Пример 4.6. Для сечения неравноведренного уголка (рис. 4.11) определить положение главных центральных осей и моменты инерции и радиусы инерции относительно этих осей.

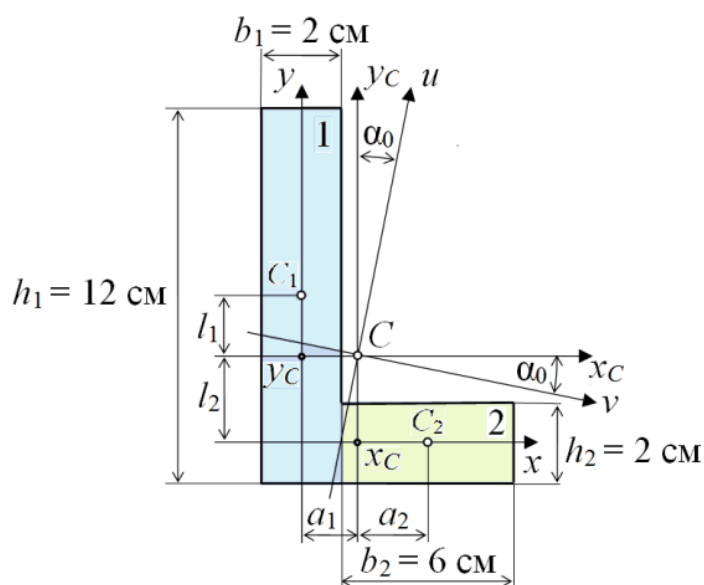


Рисунок 4.11 – Сечение неравноведренного уголка

Решение. Разбиваем сечение на элементы: 1 - прямоугольник с основанием $b_1 = 2$ см и высотой $h_1 = 12$ см, 2 - прямоугольник с основанием $b_2 = 6$ см и высотой $h_2 = 2$ см (1; 2 – индексы элементов сечения).

Площади элементов

$$A_1 = b_1 h_1 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ см}^2; \quad A_2 = b_2 h_2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ см}^2.$$

Через центры тяжести элементов C_1 и C_2 проводим оси x , y . Определим координаты центра C тяжести сечения относительно осей x , y

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i x_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{A_1 \cdot 0 + A_2 (b_1 / 2 + b_2 / 2)}{A_1 + A_2} = \frac{24 \cdot 0 + 12(2 / 2 + 6 / 2)}{24 + 12} = 1,33 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i y_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{A_1 (h_1 / 2 - h_2 / 2) + A_2 \cdot 0}{A_1 + A_2} = \frac{24(12 / 2 - 2 / 2) + 12 \cdot 0}{24 + 12} = 3,33 \text{ см}.$$

Через центр C тяжести сечения с координатами $x_C = 1,33$ см и $y_C = 3,33$ см проводим центральные оси x_C , y_C , параллельные осям x , y .

Расстояния от центров тяжести элементов до центральные осей x_C , y_C

$$a_1 = x_{1C} = 1,33 \text{ см}; \quad a_2 = b_1 / 2 + b_2 / 2 - x_{1C} = 2 / 2 + 6 / 2 - 1,33 = 2,67 \text{ см};$$

$$l_1 = h_1 / 2 - h_2 / 2 - y_{1C} = 12 / 2 - 2 / 2 - 3,33 = 1,67 \text{ см}; \quad l_2 = y_{1C} = 3,33 \text{ см}.$$

Статические моменты сечения относительно центральных осей x_C , y_C

$$S_{x_C} = \sum_{i=1}^2 A_i y_i = A_1 l_1 + A_2 l_2 = 24 \cdot 1,67 + 12 \cdot 3,33 = 80 \text{ см}^3;$$

$$S_{y_C} = \sum_{i=1}^2 A_i x_i = A_1 a_1 + A_2 a_2 = 24 \cdot 1,33 + 12 \cdot 2,67 = 64 \text{ см}^3.$$

Моменты инерции элементов и сечения относительно центральных осей x_C , y_C

$$J_{x_C}^{(1)} = J_x^{(1)} + l_1^2 A_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + l_1^2 A_1 = \frac{2 \cdot 12^3}{12} + 1,67^2 \cdot 24 = 354,93 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_C}^{(2)} = J_x^{(2)} + l_2^2 A_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + l_2^2 A_2 = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 3,33^2 \cdot 12 = 137,07 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_C} = J_{x_C}^{(1)} + J_{x_C}^{(2)} = 354,93 + 137,07 = 492 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C}^{(1)} = J_y^{(1)} + a_1^2 A_1 = \frac{b_1^3 h_1}{12} + a_1^2 A_1 = \frac{2^3 \cdot 12}{12} + 1,33^2 \cdot 24 = 42,45 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C}^{(2)} = J_y^{(2)} + a_2^2 A_2 = \frac{b_2^3 h_2}{12} + l_2^2 A_2 = \frac{6^3 \cdot 2}{12} + 2,67^2 \cdot 12 = 121,55 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C} = J_{y_C}^{(1)} + J_{y_C}^{(2)} = 42,45 + 121,55 = 164 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_C y_C} = J_{x_C y_C}^{(1)} + J_{x_C y_C}^{(2)} = a_1 l_1 A_1 + a_2 l_2 A_2 = 1,33 \cdot 1,67 \cdot 24 + 2,67 \cdot 3,33 \cdot 12 = 160 \text{ см}^4;$$

Угол наклона главной оси u к вертикали

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_C y_C}}{J_{y_C} - J_{x_C}} = \frac{2 \cdot 160}{164 - 492} = -0,976; \quad 2\alpha_0 = -44,30^\circ; \quad \alpha_0 = -22,15^\circ.$$

Главные моменты инерции

$$J_v = J_{x_C} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_C} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_C y_C} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= 492 \cos^2(-22,15^\circ) + 164 \sin^2(-22,15^\circ) - 160 \sin(2 \cdot (-22,15^\circ)) = 557 \text{ см}^4;$$

$$J_u = J_{x_C} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_C} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_C y_C} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= 492 \sin^2(-22,15^\circ) + 164 \cos^2(-22,15^\circ) + 160 \sin(2 \cdot (-22,15^\circ)) = 99 \text{ см}^4.$$

Проверка: $J_v + J_u = 557 + 99 = 656 \text{ см}^4$; $J_{x_C} + J_{y_C} = 492 + 164 = 656 \text{ см}^4$;

$$J_u + J_v = J_{x_c} + J_{y_c} = 656 \text{ см}^4.$$

Главные радиусы инерции

$$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}} = \sqrt{\frac{557}{24+12}} = 3,93 \text{ см}; \quad i_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}} = \sqrt{\frac{99}{24+12}} = 1,66 \text{ см}.$$

4.9 Главные плоскости стержня

Главная плоскость стержня – плоскость, проходящая через продольную ось стержня z и одну из главных центральных осей сечения u или v . Главные плоскости стержней с прямоугольным сечением и сечением неравностороннего уголка (см. пример 4.6) приведены на рис. 4.12.

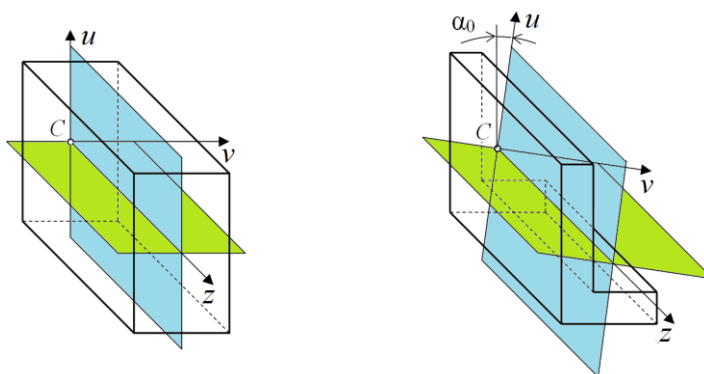


Рисунок 4.12 – Главные плоскости стержней

5 КРУЧЕНИЕ

5.1 Крутящий момент. Эпюры крутящих моментов

Кручение – сопротивление стержня, когда в поперечных сечениях стержня от внешней нагрузки возникают только крутящие моменты (другие внутренние силовые факторы отсутствуют).

Стержень, который работает на кручение, называют валом.

Кручение испытывают валы двигателей, станков, приводов машин, элементы пространственных стержневых конструкций.

Кручение вызывается действием внешних моментов, которые лежат в плоскости, перпендикулярной продольной оси стержня. Такие моменты будем называть вращающими моментами и обозначать буквой T .

Внутренние силовые факторы (крутящие моменты) в поперечных сечениях стержня определяются по методу сечений (см. формулы (1.2)).

Установим правила для определения крутящих моментов в стержнях, нагруженных внешними вращающими моментами.

Рассмотрим кручение вала двумя вращающимися моментами T , приложенными на его торцах (рис. 5.1, а).

Определим внутренний крутящий момент в произвольно выбранном поперечном сечении I – I. Мысленно разрежем вал этим сечением на две части и отбросим правую часть вала (рис. 5.1, б). Действие отброшенной части заменим действием внутреннего крутящего момента M_k . Из условия равновесия левой части вала находим

$$M_k = T. \quad (5.1)$$

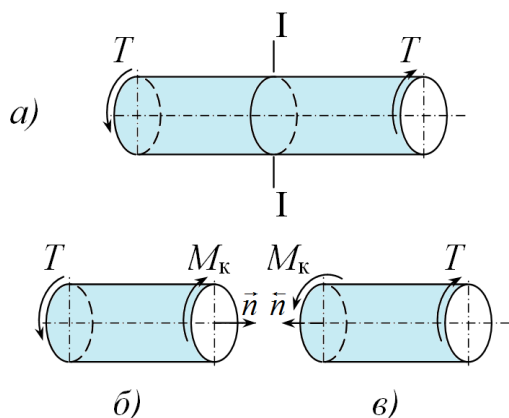


Рисунок 5.1 – Кручение вала:
а – нагружение внешними вращающимися моментами T ;
б, в – внутренние крутящие моменты M_k соответственно для левой и правой части вала

В сечении отброшенной части рассматриваемого вала в соответствии с третьим законом Ньютона действует тот же внутренний крутящий момент M_k , но противоположного направления. Отброшенная часть вала также уравновешена (рисунок 5.1, в).

В общем случае, когда на вал действует произвольное число внешних крутящих моментов, формула (5.1) для определения внутреннего крутящего момента в поперечном сечении вала приводится к виду

$$M_k = \sum T, \quad (5.2)$$

где $\sum T$ – алгебраическая сумма внешних крутящих моментов, приложенных к валу по одну сторону сечения.

Внутренний крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала равняется алгебраической сумме внешних вращающихся моментов, приложенных по одну сторону от сечения.

Знак крутящего момента не имеет физического смысла. Но для однозначности построения эпюр крутящих моментов будем придерживаться следующего правила знаков. В формуле (5.2) внешний крутящий момент берется со знаком “+”, если при взгляде на отсеченную часть вала со стороны внешней нормали \vec{n} он направлен против хода часовой стрелки (рис. 5.1, б, в), и со знаком “–” – когда крутящий момент направлен по ходу часовой стрелки.

Пример 5.1. Для вала постоянного поперечного сечения (рис. 5.2), который находится в равновесии под действием четырех крутящих моментов $T_1 = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_2 = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_3 = 900 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_4 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, построить эпюру крутящих моментов.

Рассмотрим три участка вала. Границами участков являются сечения, в которых приложены крутящие моменты.

Для поперечного сечения с координатой z_1 на участке 1 складывая вращающие моменты, приложенные по левую сторону сечения, определим по формуле (5.2) крутящий момент:

$$M_{к1} = -T_1 = -400 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Крутящий момент $M_{к1}$ не зависит от координаты z_1 , то есть на участке 1

$$M_{к1} = \text{const}.$$

Аналогично для участков 2 и 3:

$$M_{к2} = -T_1 - T_2 = -400 - 200 = -600 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{к3} = -T_1 - T_2 + T_3 = -400 - 200 + 900 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рисунке 4.2, б.

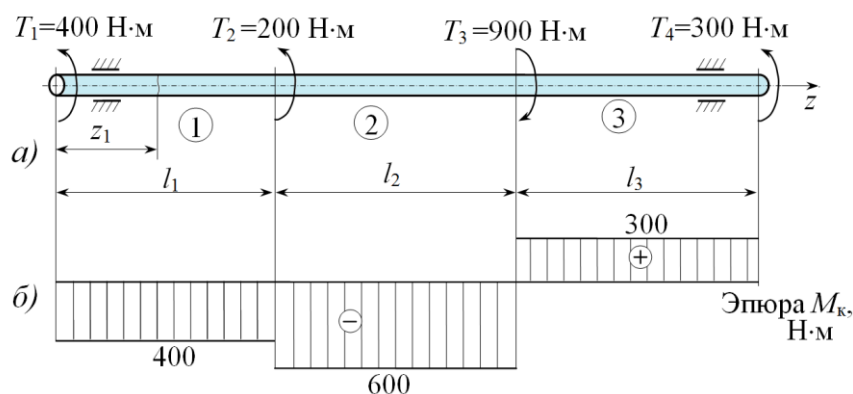


Рисунок 5.2 – Расчетная схема вала (а) и эпюра крутящих моментов (б)

5.2 Касательные напряжения

Для определения напряжений по известному крутящему моменту рассмотрим кручение вала круглого поперечного сечения, изготовленного для большей наглядности из резины. На боковую поверхность вала нанесена прямоугольная сетка из прямых, параллельных продольной оси, и окружностей, которые представляют собой внешние контуры поперечных сечений (рис. 5.3).

При действии крутящих моментов продольная ось вала остается прямолинейной, поперечные сечения (круги) не искривляются и расстояния между ними не изменяются, сечения вращаются относительно продольной оси.

Рассмотрим вал, жестко закрепленный одним концом (рис. 5.3).

Под действием вращающего момента T , приложенного на свободном конце вала, сечения повернутся на некоторые углы по отношению к своему начальному положению или, что то же самое, по отношению к неподвижному сечению (защемлению).

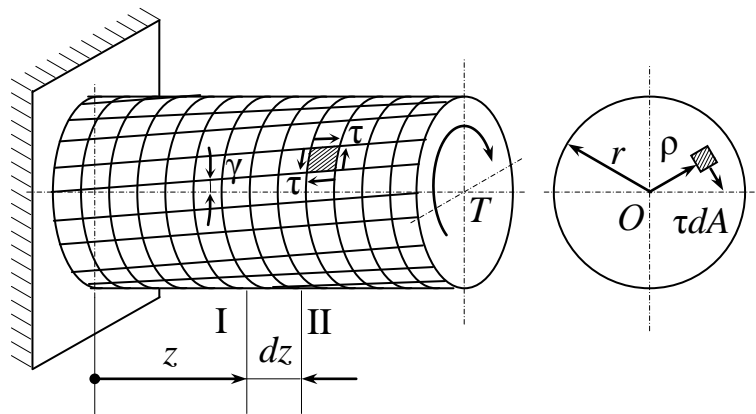


Рисунок 5.3 – Деформация вала при кручении

Для произвольного сечения I с координатой z угол поворота будет составлять φ_z , а для сечения II с координатой $z + dz$: $\varphi_z + d\varphi$.

Угол $d\varphi$ представляет собой угол поворота сечения II относительно сечения I, или угол закручивания элемента вала dz .

Крутящий момент во всех поперечных сечениях вала

$$M_k = T.$$

Выразим его через касательные напряжения, которые возникают в сечении.

Касательное напряжение в каждой точке сечения направлено перпендикулярно радиусу. Это вытекает из характера деформации: при повороте сечения его точки перемещаются по концентрическим окружностям, т.е. направление перемещений точек и направление возникающих в них касательных напряжений перпендикулярны соответствующему радиусу (рисунок 5.3). Момент элементарной силы τdA относительно продольной оси (точка O) равняется:

$$dM_k = (\tau dA)\rho. \quad (5.3)$$

Интегрируем выражение (4.3) по площади сечения A , получим зависимость, которая связывает крутящий момент и касательные напряжения

$$T = \int_A \tau \rho dA. \quad (5.4)$$

Для определения закона распределения касательных напряжений выделим часть вала dz между сечениями I и II и радиусом ρ ($0 \leq \rho \leq r$, где r – радиус вала, см. рис. 5.3). Примем, что выделенная часть в сечении I закреплена.

Затем из части вала dz выделим сектор кольца с произвольным центральным углом ψ радиусом ρ и толщиной $d\rho$ (рис. 5.4).

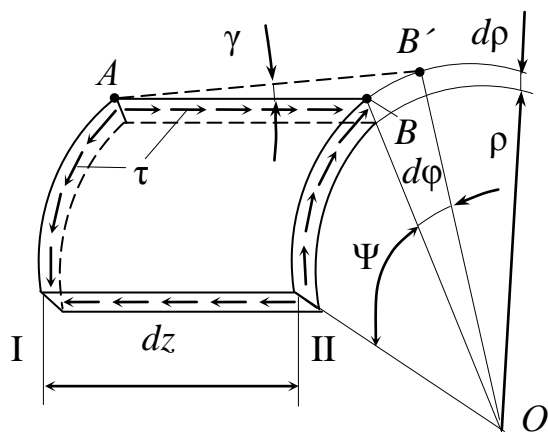


Рисунок 5.4 – Деформация элемента вала при кручении

Точка B сечения II при его повороте на угол $d\varphi$ перейдет из положения B в положение B' . Из треугольника ABB' абсолютное перемещение точки B равняется:

$$BB' = dz \operatorname{tg} \gamma.$$

Из-за малости деформаций $\operatorname{tg} \gamma = \gamma$ (здесь γ – угловая деформация). Тогда:

$$BB' = dz \gamma.$$

Аналогично из треугольника OBB' :

$$\hat{A}\hat{A}' = \rho d\varphi.$$

Из двух последних выражений, приравнявая их правые части, получим значение угловой деформации:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (5.5)$$

Согласно закону Гука для сдвига ($\tau = \gamma G$) находим значение касательного напряжения:

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (5.6)$$

Подставив (5.6) в (5.4), получим:

$$M_{\kappa} = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA.$$

Обозначим

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (5.7)$$

Величина J_p называется полярным моментом инерции сечения (см. п. 4.2).

С учетом (5.7):

$$M_k = GJ_p \frac{d\varphi}{dz},$$

или

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GJ_p}. \quad (5.8)$$

Подставив (5.8) в (5.6), получим формулу распределения касательных напряжений по сечению вала

$$\tau = \frac{M_{\hat{e}}}{J_p} \rho. \quad (5.9)$$

Из формулы (4.9) следует, что касательные напряжения изменяются вдоль любого радиуса по линейному закону и в точках, равноотстоящих от центра сечения, одинаковы. Эпюры распределения касательных напряжений в круговых и кольцевых сечениях вала показаны на рисунке 5.5.

Наибольшего значения касательное напряжение достигает при $\rho = \rho_{\max} = r$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\hat{e}}}{J_p} \rho_{\max} = \frac{M_{\hat{e}}}{W_p},$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\hat{e}}}{W_p}, \quad (5.10)$$

где W_p - полярный момент сопротивления сечения (см. п. 4.7).

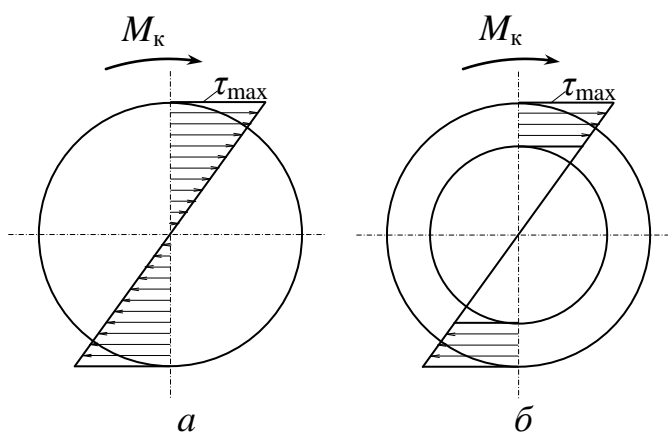


Рисунок 4.5 – Эпюры касательных напряжений в круговом (а) и кольцевом (б) поперечных сечениях

5.3 Условие прочности

Прочность вала при кручении считают обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения τ_{\max} в опасном сечении не превышают допускаемых напряжений $[\tau_{\hat{\epsilon}}]$

$$\tau_{\max} = \frac{\dot{I}_{\hat{\epsilon}}}{W_p} \leq [\tau_{\hat{\epsilon}}], \quad (5.11)$$

где M_k – крутящий момент в опасном сечении вала; опасное (наиболее нагруженное) сечение вала определяется по эпюре крутящих моментов; $[\tau_k]$ – допускаемое напряжение при кручении.

Для валов с переменными сечениями условие (5.12) должно выполняться для всех участков.

Допускаемое напряжение определяется по результатам испытаний на кручение. Механические характеристики материалов взаимосвязаны и, при необходимости, ориентировочно допускаемое касательное напряжение может быть определено из эмпирических зависимостей:

– для стали : $[\tau_k] \approx (0,55 \dots 0,6) [\sigma_p]$;

– для чугуна : $[\tau_k] \approx (1,0 \dots 1,2) [\sigma_p]$,

где $[\sigma_p]$ – допускаемое нормальное напряжение при растяжении.

Кроме проверочного расчета из условия (4.14) можно определить:

– полярный момент сопротивления или диаметр вала (необходимые при проектном расчете)

$$W_p \geq \frac{\dot{I}_{\hat{\epsilon}}}{[\tau_{\hat{\epsilon}}]}; \quad (5.12)$$

$$D^* \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau_k]}} \quad (5.13)$$

– допускаемый крутящий момент при заданных размерах поперечного сечения и материале вала

$$[\dot{I}_{\hat{\epsilon}}] = [\tau_{\hat{\epsilon}}] W_p. \quad (5.14)$$

* формула (5.14) - для круглого сплошного сечения.

5.4 Деформации при кручении. Условие жесткости

При кручении происходит поворот сечений вала относительно друг друга.

Угол относительного поворота двух сечений, отдаленных на расстоянии l (или, что то же самое, угол закручивания участка вала длиной l) можно определить из выражения (5.8), выполнив интегрирование по длине участка l

$$\varphi = \int_l \frac{M_k}{GJ_p} dz. \quad (5.15)$$

Для случая, когда в пределах участка $M_k = \text{const}$ и $J_p = \text{const}$, после интегрирования правой части, получим

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p}. \quad (5.16)$$

Единица измерения угла закручивания φ в системе СИ – радианы.

Произведение GJ_p называется жесткостью вала на кручение.

В некоторых случаях вал должен удовлетворять не только условиям прочности, но и жесткости на кручение. Например, деформация кручения ходовых винтов токарных станков приводит к увеличению погрешности при нарезании резьбы. Поэтому их деформации кручения ограничиваются.

Жесткость при кручении, как обычно, характеризуют относительным (или погонным) углом закручивания θ , который определяется из выражения

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (5.17)$$

Или с учетом (4.19) условие жесткости приобретает вид

$$\theta = \frac{\dot{I}_{\hat{e}}}{GJ_p} \leq [\theta]. \quad (5.18)$$

Кроме проверки жесткости из выражения (4.19) можно определить:

– момент инерции сечения и диаметр вала

$$J_p \geq \frac{M_{\hat{e}}}{G[\theta]}; \quad (5.19)$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32\dot{I}_{\hat{e}}}{G[\theta]}}. \quad (5.20)$$

– допускаемый крутящий момент при заданных размерах и материале вала

$$[M_{\hat{\epsilon}}] = [\theta] G J_p. \quad (5.21)$$

– подобрать материал вала при заданных других величинах

$$G = \frac{M_{\hat{\epsilon}}}{\theta J_p}. \quad (5.22)$$

При проектном расчете диаметр вала должен одновременно удовлетворять условиям (5.13) и (5.20). Поэтому в качестве окончательного размера должно быть принято большее значение диаметра, которое удовлетворяет обоим этим условиям.

6 ИЗГИБ

6.1 Основные понятия

Под *изгибом* понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты. Наряду с изгибающими моментами при изгибе в большинстве случаев возникают и поперечные силы.

Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*.

Чистый изгиб – деформация, при которой в поперечных сечениях стержня действует только изгибающий момент.

Поперечный изгиб – деформация, при которой в поперечных сечениях стержня действуют одновременно изгибающие моменты и поперечные силы.

Если внешняя нагрузка расположена в плоскости, которая проходит через одну из главных центральных осей инерции этого сечения (в частности – ось симметрии), то балка деформируется в этой же плоскости. Такой изгиб называют *прямым или плоским*.

На рисунке 6.1 изображен брус, подвергнутый прямому изгибу. Изгиб вызывается действием сил и моментов, которые лежат в силовой плоскости Π , проходящей через продольную ось балки. Далее, если не обусловливается особо, будет рассматриваться прямой изгиб в плоскости yOz .

В условиях изгиба работают валы зубчатых передач, элементы мостов и мостовых перекрытий, рельсы железнодорожного пути, хребтовые балки вагонов, оси колесных пар, и т.п.

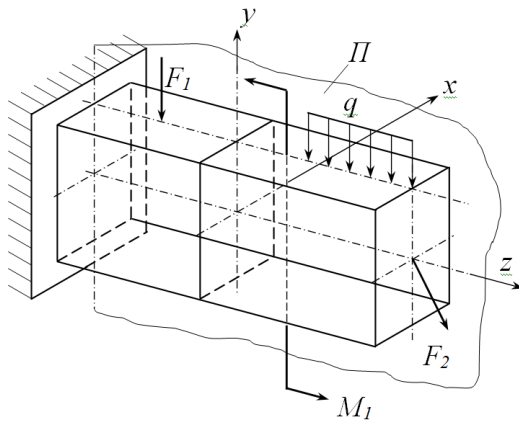


Рисунок 6.1 – Прямой изгиб бруса

6.2 Типы опор балок. Типы балок

Конструктивное изготовление опор балок довольно разнообразное. В сопротивлении материалов все конструктивное разнообразие опор сводят к трем основным типам: шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная и заземляющая опоры.

Шарнирно подвижная опора (рис. 6.2, а) допускает поворот балки относительно опоры, и перемещение в одном направлении (на рис. 6.2, а это направление, перпендикулярное опорному стержню). Реакция R такой опоры направлена вдоль опорной связи (шарнирного опорного стержня) перпендикулярно направлению допускаемых перемещений.

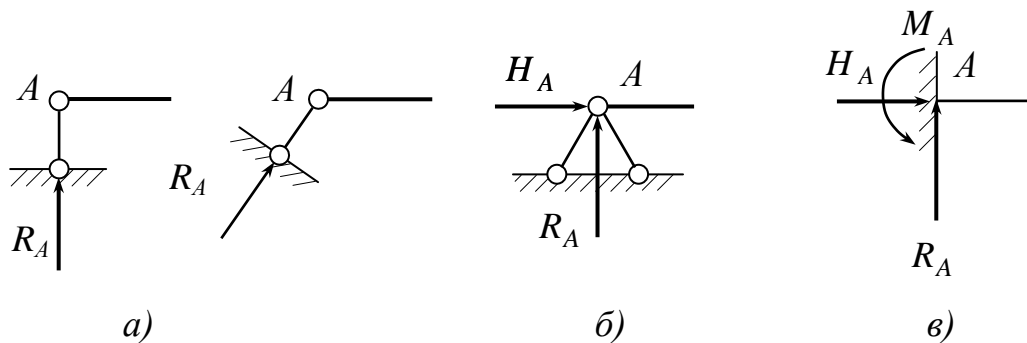


Рисунок 6.2 – Типы опор балок: а – шарнирно-подвижная опора; б – шарнирно-неподвижная опора; в – заземляющая опора

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 6.2, б) допускает свободный поворот балки относительно опоры, но не допускает ни вертикального, ни горизонтального перемещения. В опоре возникает сила реакции, направление которой зависит от внешних сил, действующих на балку. Для удобства определения ее обычно заменяют проекциями R_A и H_A на оси координат.

Защемление (рис. 6.2, в) не допускает ни поворота, ни линейных перемещений балки. Реакция защемления состоит из силы, которую обычно заменяют составляющими R_A и H_A , и момента M_A .

В зависимости от количества и типа опор, соединяющих балки с основанием, выделяют следующие типы балок:

1) простая (однопролетная или двухопорная) балка (рис. 6.3, *a*); балка имеет одну шарнирно-неподвижную и одну шарнирно-подвижную опору; расстояние l между опорами балки называется *пролетом*;

2) простая балка с одной или с двумя консолями (рис. 6.3, *б, в*); свешивающиеся части (BC на рис. 6.3, *б* и CA и BD на рис. 6.3, *в*) называются *консолями*;

3) консольная балка (рис. 6.3, *г*) имеет одну защемляющую опору; длина балки l называется *вылетом*;

4) шарнирная балка (рис. 6.3, *д*) образовывается присоединением к простой или консольной балке дополнительных участков с помощью шарниров и шарнирно-подвижных опор; в статически определенных балках число дополнительных шарниров равняется числу дополнительных опор (на рис. 6.3, *д* таковыми являются шарниры B, C и опоры C, D);

5) неразрезная балка (рис. 6.3, *е*) образовывается присоединением к простой или консольной балке дополнительных шарнирно-подвижных опор; шарниры в дополнительных опорах не перерезают балку, а присоединяются к ней снизу.

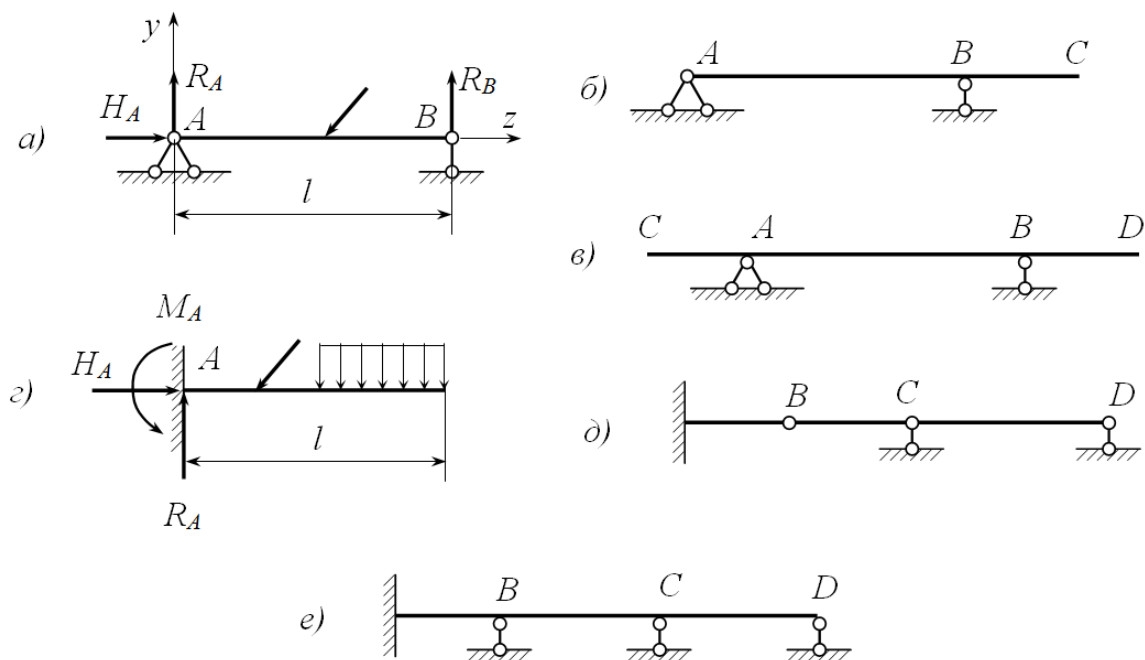


Рисунок 6.3 – Типы балок: *a* – простая балка; *б* – простая балка с одной консолью; *в* – простая балка с двумя консолями; *г* – консольная балка; *д* – шарнирная балка; *е* – неразрезная балка

Для определения опорных реакций в балках, нагруженных плоской системой сил, можно составить три независимых уравнения равновесия. В балках 1-3 неизвестных реакций также три. Поэтому эти балки статически

определимые. Балка 4 (шарнирная) также статически определимая, так как число неизвестных реакций в дополнительных опорах равняется числу дополнительных уравнений равновесия, так как каждый промежуточный шарнир добавляет одно дополнительное уравнение: сумма моментов относительно шарнира от всех сил, расположенных по одну сторону от него, равняется нулю.

Балка 5 (неразрезная) статически неопределимая. Степень статической неопределимости равняется числу реакций в дополнительных опорах.

6.3 Определение опорных реакций в балках

Набор уравнений равновесия для определения опорных реакций должен быть рациональным: нужно избегать необходимости решать эти уравнения **совместно**.

Для простой двухопорной балки (см. рис. 6.3, *a*) таковыми являются уравнения:

а) сумма проекций всех сил на ось балки равняется нулю

$$\sum F_i^z = 0,$$

откуда находят H_A .

б) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира A равняется нулю:

$$\sum M_i^A = 0,$$

откуда находят R_B .

в) сумма моментов всех сил относительно шарнира B равняется нулю:

$$\sum M_i^B = 0,$$

откуда находят R_A .

Для контроля следует использовать условие равенства нулю суммы проекций всех сил на ось y

$$\sum F_i^y = 0.$$

Для консольных балок при определении реакций рациональным является набор уравнений в виде одного уравнения суммы моментов и двух уравнений сумм проекций сил на оси y , z . Для контроля следует использовать уравнение суммы моментов относительно любой другой точки, кроме той, которая принималась при определении реакций.

Для шарнирных балок дополнительными уравнениями при определении реакций являются условия равенства нулю суммы моментов относительно шарниров, соединяющих отдельные части балки.

6.4 Внутренние силовые факторы при изгибе

Для определения внутренних усилий при изгибе рассмотрим простую двухопорную балку длиной l , нагруженную в промежуточном сечении силой F (рис. 6.4, *a*).

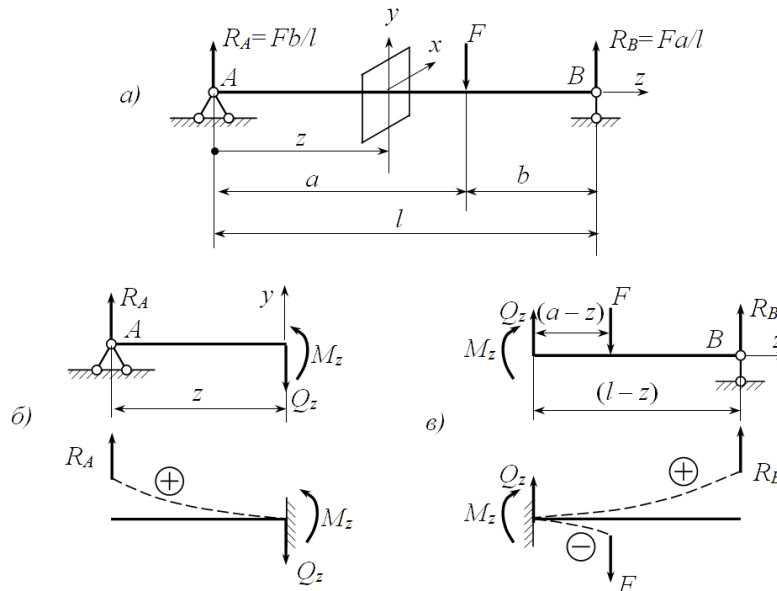


Рисунок 6.4 – Определение внутренних силовых факторов при изгибе:
a – расчетная схема балки; *б*, *в* – соответственно левая и правая части балки для сечения z

В опорах балки действуют реакции, которые определяются из условий равновесия балки. Из условий $\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$ определяем, соответственно

$$R_B = Fa/l; \quad R_A = Fb/l.$$

Мысленно рассечем балку произвольным поперечным сечением с координатой z и отбросим правую часть балки. Действие отброшенной части заменим действием поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x (другие внутренние силовые факторы отсутствуют, так как проекции внешних сил на оси x и z и моментов относительно осей y и z равняются нулю).

Из условий равновесия левой части балки (рис. 5.4, *б*) (сумма проекций сил на ось y)

$$\sum F_y^{\text{вн}} = R_A - Q_z = 0$$

находим поперечное усилие в сечении

$$Q_z = R_A. \quad (6.1)$$

В общем случае, когда на балку действует произвольное число внешних усилий, формула (5.1) для определения поперечной силы Q_z в сечении приобретает вид

$$Q = \sum F_i, \quad (6.2)$$

где $\sum F_i$ – алгебраическая сумма проекций внешних сил на ось y , приложенных к балке по одну сторону от сечения.

Поперечная сила Q в произвольном поперечном сечении балки равняется алгебраической сумме проекций внешних сил на ось y , приложенных по одну сторону от сечения.

Примем следующее правило знаков для поперечных сил: внешняя сила F_i входит в сумму в формуле (6.2) со знаком “+”, если она стремится повернуть рассматриваемую отсеченную часть относительно сечения, в котором определяется поперечная сила, по часовой стрелке.

Это правило универсальное, т.е. оно справедливо и для левой и для правой отсеченных частей балки.

Согласно этому правилу поперечная сила Q в сечении z для левой части на рисунке 6.4 положительна, так как сила F , которая вызывает эту силу, стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке, т.е.

$$Q_z = R_A = Fb/l.$$

На правую часть балки действуют внешние силы: реакция R_B и сила F .

Для правой части балки имеем то же самое значение поперечной силы

$$Q = -R_B + F = -Fa/l + F = Fb/l.$$

Из суммы моментов внешних сил относительно центра тяжести сечения, приложенных к левой части балки

$$\sum M_i^{\text{лев}} = -R_A z + M_z = 0,$$

находим изгибающий момент

$$M_{\delta} = R_A z = \frac{Fb}{l} z. \quad (6.3)$$

При действии произвольного числа внешних сил и моментов формула (5.3) для определения изгибающего момента в сечении приводится к виду

$$M_{\delta} = \sum M_i. \quad (6.4)$$

где $\sum M_i$ – алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно центра тяжести сечения, приложенных по одну сторону от сечения.

Изгибающий момент M_x в произвольном сечении балки z равняется алгебраической сумме моментов внешних сил относительно центра тяжести сечения, приложенных по одну сторону от сечения.

Примем следующее правило знаков для изгибающих моментов: внешний момент M_i входит в сумму в формуле (6.4) со знаком “+”, если он стремится вызвать изгиб балки выпуклостью вниз.

Согласно этому правилу реакция R_A вызывает изгиб левой части балки выпуклостью вниз (рис. 6.4, б). Поэтому изгибающий момент от нее в формуле (5.3) положительный.

Для правой части балки изгибающий момент в том же самом сечении z создается реакцией R_B , которая вызывает изгиб этой части выпуклостью вниз (рис. 6.4, б), и внешней силой F , которая вызывает изгиб выпуклостью вверх.

Поэтому изгибающий момент от реакции R_B положительный, а от силы F – отрицательный.

Суммарный изгибающий момент для правой части балки

$$M_{\sigma} = R_B(l-z) - F(a-z) = \frac{F a}{l}(l-z) - F(a-z) = \frac{F b}{l} z.$$

Полученное значение M_z для правой части балки совпадает со значением для левой части (см. формулу (6.3)).

6.5 Дифференциальные зависимости при изгибе

Рассмотрим балку с произвольной нагрузкой (рис. 6.5, а). Распределенную нагрузку направим вверх. Такая нагрузка дает положительную составляющую для изгибающего момента в любом сечении.

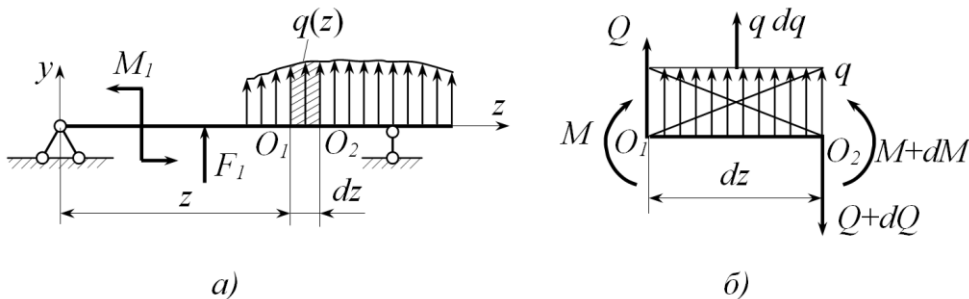


Рисунок 6.5 – Балка с произвольно распределенной нагрузкой:
а – расчетная схема; б – элемент балки

Выделим на участке, где нет сосредоточенных сил и моментов, малый элемент $O_1 O_2$. Он находится в равновесии под действием внешней

нагрузки, поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях O_1 и O_2 , расположенных на расстоянии dx один от другого (рисунок 6.5, б). Поскольку в общем Q и M изменяются вдоль оси балки, то в сечении O_1 имеем $Q(z)$ и $M(z)$, а в сечении O_2 имеем $Q(z) + dQ$ и $M(z) + dM$. Для вывода будем их считать положительными.

Из условия равновесия выделенного участка балки длиной dz

$$\begin{aligned}\sum F_i^y &= Q + q dz - (Q + dQ) = 0; \\ \sum M_i^{O_2} &= M + Q dz + q dz \frac{dz}{2} - (M + dM) = 0.\end{aligned}$$

Первое уравнение дает условие

$$\frac{dQ}{dz} = q. \quad (6.5)$$

Первая производная от поперечной силы на участке балки равняется интенсивности распределенной нагрузки на этом участке.

Из второго уравнения, пренебрегая членом $q dz(dz/2)$ второго порядка малости, найдем

$$\frac{dM}{dz} = Q. \quad (6.6)$$

Первая производная от изгибающего момента на участке балки равняется поперечной силе на этом участке.

На основании формул (6.5) и (6.6) будем иметь

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = q. \quad (6.7)$$

Вторая производная от изгибающего момента на участке балки равняется интенсивности распределенной внешней нагрузки.

Соотношение (6.5) – (6.7) называют *дифференциальными зависимостями при изгибе (зависимостями Д. И. Журавского)*.

Их используют при построении и контроле правильности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

6.6 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов рассмотрим на примерах.

Пример 6.1. Балка с защемлением длиной l загружена на свободном конце сосредоточенной силой F (рис. 6.6, а).

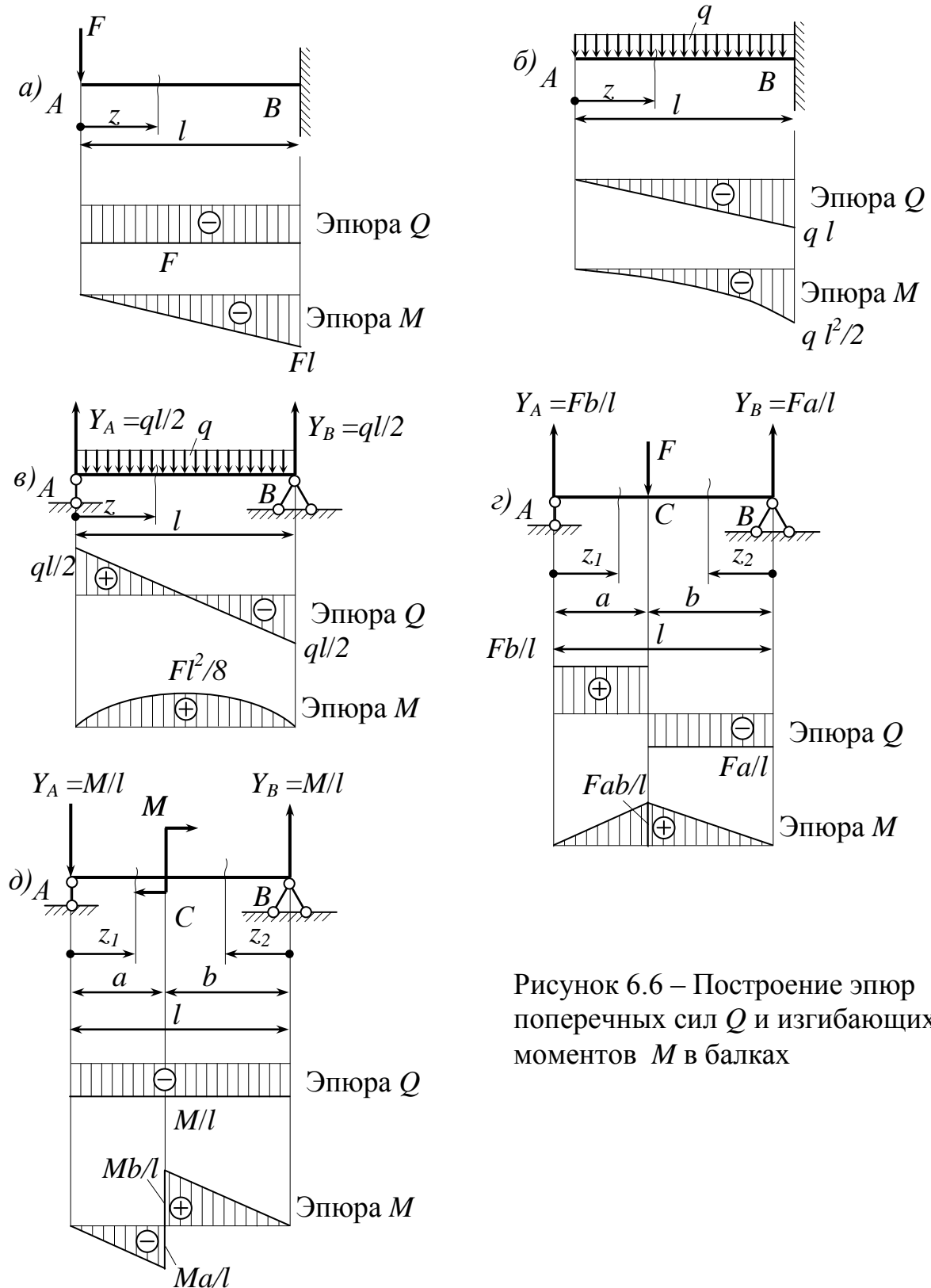


Рисунок 6.6 – Построение эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M в балках

Поместим начало координат на левом конце балки, ось z направим вдоль продольной оси балки, а оси x и y , соответственно, вертикально и горизонтально к ней. (Такую же систему координат примем и в других примерах, кроме случаев, которые обуславливаются отдельно). Мысленно рассечем балку сечением с координатой z ($0 \leq z \leq l$).

Поперечную силу определим как сумму внешних сил, которые приложены по левую сторону от сечения

$$Q = -F.$$

Знак “–” принят потому, что сила F стремится повернуть левую отсеченную часть балки относительно сечения z против часовой стрелки.

Поперечная сила Q не зависит от координаты z и во всех точках балки постоянна.

Сила F относительно центра тяжести сечения создает отрицательный изгибающий момент:

$$M = -Fz.$$

Это уравнение прямой линии. Для ее построения определим значения M в двух точках A и B на концах балки:

$$\text{при } z = 0 \quad M_A = 0; \quad \text{при } z = l \quad M_B = -Fl.$$

Пример 6.2. Балка с защемлением длиной l испытывает действие распределенной нагрузки $q = \text{const}$ (рис. 6.6, б).

Поперечная сила в сечении с координатой z ($0 \leq z \leq l$) равняется равнодействующей распределенной нагрузки, которая приложена к балке по левую сторону сечения:

$$Q_y = -qz,$$

а изгибающий момент – произведению этой равнодействующей на плечо $z/2$:

$$M_x = -qz \cdot z/2 = -qz^2/2.$$

Это уравнения прямой и параболы, соответственно. Для их построения определим внутренние силовые факторы на концах и посередине балки:

$$\text{при } z = 0 \quad Q_y = 0; \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z = l \quad Q_y = -ql; \quad M_x = -ql^2/2;$$

$$\text{при } z = l/2 \quad M_x = -ql^2/8.$$

Как следует из рисунка 6.6, б выпуклость параболы направлена навстречу направления распределенной нагрузки q .

Пример 6.3. Двухопорная балка длиной l загружена равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$ (рисунок 6.6, в).

Опорные реакции из условия равновесия с учетом симметричности нагрузки, будут:

$$Y_A = Y_B = ql/2.$$

Поперечная сила и изгибающий момент в сечении с координатой z ($0 \leq z \leq l$):

$$Q_y = Y_A - qz = q\frac{l}{2} - qz;$$

$$M_x = Y_A z - q \frac{z^2}{2} = q \frac{lz}{2} - q \frac{z^2}{2}.$$

Поперечная сила изменяется по линейному закону, изгибающий момент – по закону параболы. Их значения на концах балки:

$$\text{при } z = 0 \quad Q_y = q \frac{l}{2}; \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z = l \quad Q_y = -q \frac{l}{2}; \quad M_x = 0.$$

Значение изгибающего момента на концах балки равняется 0, а поперечная сила изменяет знак в пределах участка. Согласно условию экстремума, которым является равенство нулю первой производной от изгибающего момента, т.е. в соответствии с условием (6.6), имеем:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y = q \frac{l}{2} - qz = 0.$$

Отсюда координата сечения, где действует экстремальный (максимальный) изгибающий момент $z = l/2$, а его значение:

$$M_{x\max} = q \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} \right) - q \frac{\left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} = q \frac{l^2}{8}.$$

Максимальный момент действует в середине балки и ему соответствует нулевое значение поперечной силы. Выпуклость эпюры изгибающих моментов направлена навстречу действия распределенной нагрузки.

Пример 6.4. Двухопорная балка длиной $l = a + b$ на расстоянии a от левой опоры A загружена сосредоточенной силой F (рисунок 6.6, z).

Из условий равновесия определим опорные реакции

$$Y_A = F \frac{b}{l}; \quad Y_B = F \frac{a}{l}.$$

Рассмотрим два участка балки : AC и BC .

Участок AC . Поперечная сила и изгибающий момент в сечении z_1 ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$Q_y = -Y_A = -F \frac{b}{l};$$

$$M_x = Y_A z_1 = F \frac{b z_1}{l}.$$

Поперечная сила во всех сечениях участка AC постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Его значение на границах участка: при $z_1 = 0$ $M_x = 0$; при $z_1 = a$ $M_x = F \frac{ab}{l}$.

Участок BC . Для этого участка примем систему координат с началом на правом конце балки, в точке B . Поперечная сила и изгибающий момент в сечении z_2 ($0 \leq z_2 \leq b$):

$$Q_y = -Y_B = -F \frac{a}{l};$$

$$M_x = Y_B z_2 = F \frac{a z_2}{l}.$$

Поперечная сила во всех сечениях участка BC постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Его значение на границах:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_x = 0; \quad \text{при } z_2 = b \quad M_x = F \frac{ab}{l}.$$

Пример 6.5. Двухопорная балка длиной $l = a + b$ на расстоянии a от левой опоры A нагружена сосредоточенным моментом M (рисунок 6.6, δ).

Из условий равновесия балки определим опорные реакции:

$$Y_A = Y_B = \frac{M}{l}.$$

Рассмотрим два участка балки: AC и BC .

Участок AC . Поперечная сила и изгибающий момент в сечении z_1 ($0 \leq z_1 \leq a$):

$$Q_y = -Y_A = -\frac{M}{l};$$

$$M_x = -Y_A z_1 = -M \frac{z_1}{l}.$$

Поперечная сила во всех сечениях участка AC постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Его значение на границах участка:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x = 0; \quad \text{при } z_1 = a \quad M_x = -M \frac{a}{l}.$$

Участок BC . Для этого участка примем левую систему координат с началом на правом конце балки. Поперечное усилие и изгибающий момент в сечении z_2 ($0 \leq z_2 \leq b$):

$$Q_y = -Y_B = -\frac{M}{l};$$

$$M_x = Y_B z_2 = M \frac{z_2}{l}.$$

Поперечная сила во всех сечениях участка BC постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Его значение на границах участка:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_x = 0; \quad \text{при } z_2 = b \quad M_x = M \frac{b}{l}.$$

Контроль правильности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Из дифференциальных зависимостей Журавского Д.И. при изгибе и из рассмотренных примеров вытекают следующие свойства эпюр поперечных сил и изгибающих моментов :

1) На участке балки между сосредоточенными силами, в том числе и реакциями, эпюра поперечных сил Q_y – прямая параллельная оси балки, а эпюра изгибающих моментов M_x – наклонная к оси балки прямая (пример 1, п. 5.6);

2) в точках приложения сосредоточенных сил (и реакций) эпюра Q_y имеет “скачок” на величину силы, а эпюра M_x – угловую точку ;

3) в точках приложения сосредоточенного момента эпюра M_x имеет “скачок” на величину приложенного момента, а эпюра Q_y – без перемен ;

4) на участке с равномерно распределенной нагрузкой q эпюра Q_y наклонная к оси балки прямая, а эпюра M_x – парабола с выпуклостью противоположной действию нагрузки q (пример 1, п. 5.6). если на этом участке эпюра Q_y изменяет знак, то в сечении, где $Q_y = 0$ эпюра M_x имеет экстремум;

5) в шарнирных опорах и соединениях изгибающий момент равен нулю, если там отсутствует внешний момент (например, момент сил трения).

6.7 Нормальные напряжения при прямом чистом изгибе

При чистом изгибе в поперечных сечениях балки действуют только изгибающие моменты M_x , другие внутренние силовые факторы отсутствуют, в том числе и поперечная сила $Q_y = 0$.

В этом случае, из зависимости (5.6) вытекает, что при чистом изгибе изгибающий момент на этом участке балки постоянен $M_x = \text{const}$.

Примером деформации чистого изгиба является балка с защемлением под действием сосредоточенного момента (рис. 6.7), или ось колесной пары вагона (рис. 6.8). В обоих случаях вес самих балок не учитывается.

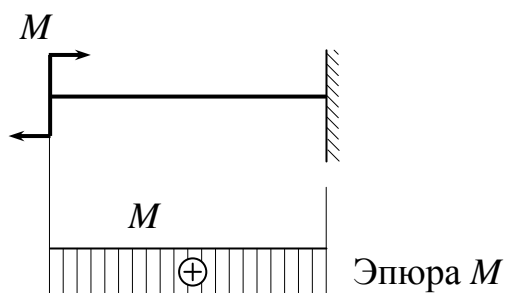


Рисунок 6.7 – Чистый изгиб консольной балки

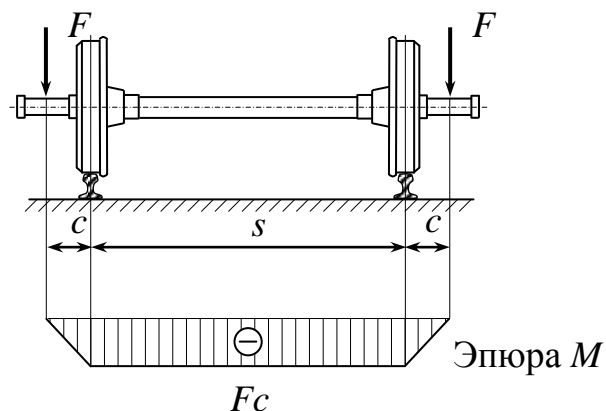


Рисунок 6.8 – Чистый изгиб колесной пары

Рассмотрим деформацию чистого изгиба резиновой модели балки прямоугольного сечения, на боковую поверхность которой нанесенная прямоугольная сетка (рисунок 6.9). По торцам балки приложим два момента M . Методом сечений нетрудно установить, что во всех сечениях балки действует постоянный изгибающий момент $M_x = M$, а поперечная сила $Q_y = 0$.

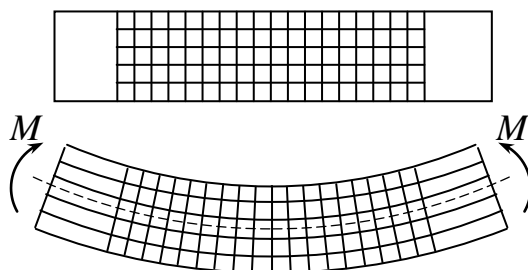


Рисунок 6.9 – Деформация чистого изгиба резиновой модели балки

Под нагрузкой продольная ось и продольные линии сетки согнутся по дугам окружностей (во всех сечениях действует один и тот же изгибающий момент, т.е. радиусы кривизны продольных линий во всех сечениях должны быть одинаковы), поперечные линии не искривляясь, повернутся на некоторые углы, оставаясь перпендикулярными продольным линиям. Длина средней продольной линии не изменится, расположенные выше ее продольные линии удлинятся, а расположенные ниже – сократятся.

Если предположить, что внутренние деформации балки имеют тот же характер, что и на поверхности, то при чистом изгибе:

- справедлива гипотеза плоских сечений (поперечные сечения балки, плоские и нормальные к продольной оси до приложения нагрузки, остаются такими же и при ее действии);

- отсутствует давление волокон одно на другое (поскольку отсутствует поперечная сила);

- в поперечных сечениях действуют только нормальные напряжения (поскольку изменяются длины волокон).

Для вывода формулы определения нормальных напряжений, рассмотрим деформацию консольной балки длиной l прямоугольного поперечного сечения с размерами b и h , нагруженной на свободном конце моментом M (рисунок 6.10, а). Двумя поперечными сечениями I и II с координатами z и $z + dz$ ($0 \leq z \leq l$) выделим бесконечно малый элемент балки длиной dz (рисунок 6.10, а, б). Будем считать, что сечение I неподвижно, тогда сечение II под действием нагрузки повернется на угол $d\varphi$ (рисунок 6.10, б). Длина средней линии не изменяется.

Выделим в сечении II произвольную элементарную площадку dA (рисунок 6.10, в). Размеры площадки примем такими, чтобы изменением нормальных напряжений σ в середине ее можно пренебречь. Равнодействующая внутренних сил на площадке dA приложена в центре площадки в точке B , координата которой y ($-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$, где h – высота поперечного сечения).

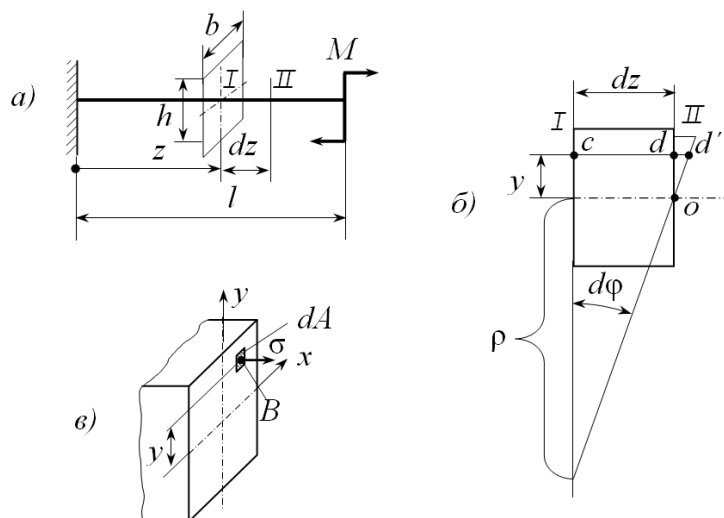


Рисунок 6.10 – Нормальные напряжения при чистом изгибе

Элементарный момент внутренних сил относительно оси x :

$$dM_x = \sigma y dA .$$

Интегрируя эту зависимость по всей площади сечения A , получим зависимость между изгибающими моментами и нормальными напряжениями в сечении балки:

$$M_x = \int_A \sigma y dA. \quad (6.8)$$

Распределение нормальных напряжений определим по относительным деформациям и закону Гука.

Рассмотрим деформацию отрезка cd длиной dz , проведенной параллельно продольной оси. При действии нагрузки точка d переместится в положение d' . Относительная деформация отрезка будет

$$\varepsilon = \frac{dd'}{cd}. \quad (6.9)$$

Из $\Delta dd'O$ имеем $dd' = y \operatorname{tg} d\varphi$.

С учетом малости $d\varphi$, можно принять

$$\operatorname{tg} d\varphi = d\varphi,$$

Тогда $dd' = y d\varphi$.

Длина отрезка cd $cd = dz = \rho d\varphi$,

где ρ – радиус кривизны изогнутой оси балки.

С учетом двух последних зависимостей выражение (6.9) приобретает

$$\text{вид} \quad \varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (6.10)$$

По закону Гука нормальное напряжение в точке B :

$$\sigma = \varepsilon \cdot \overset{\circ}{A} = \frac{\sigma}{\rho} \overset{\circ}{A}. \quad (6.11)$$

Подставив из (6.11) в (6.8) значение нормального напряжения, и вынеся за знак интеграла величины E и ρ , которые не зависят от переменной интегрирования, получим:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (6.12)$$

Интеграл в выражении (6.12) называется осевым моментом инерции сечения (см. п. 4.2). Он обозначается:

$$J_x = \int_A y^2 dA. \quad (6.13)$$

С учетом обозначений:

$$M_x = \frac{E}{\rho} J_x.$$

Отсюда величина, обратная радиусу кривизны оси балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (6.14)$$

Подставив (6.14) в (6.11), получим формулу для определения нормальных напряжений в сечении балки в зависимости от изгибающего момента

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y. \quad (6.15)$$

Из этой формулы вытекает, что нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения прямо пропорциональны ее расстояния y от нейтральной оси, т.е. линейно изменяются по высоте сечения. От координаты x сечения напряжения не зависят, т.е. по ширине сечения нормальные напряжения неизменны.

В сечении балки есть нейтральная ось (или нулевая линия) в которой нормальные напряжения равны нулю. Отметим, что до сих пор ее положение было принято произвольно: это координатная ось Ox , совпадающая с осью симметрии сечения балки.

Положение нейтральной оси определим из условия, когда продольная сила N в сечении равняется нулю:

$$N = \int_A \sigma dA = 0. \quad (6.16)$$

Подставив в (6.16) значение нормального напряжения из (6.15), получим

$$N = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Отношение $\frac{E}{\rho} \neq 0$, так как радиус кривизны не равняется бесконечности $\rho \neq \infty$ (реальная балка деформирована, ее ось согнута).

Интеграл в последней зависимости называется статическим моментом площади сечения относительно оси x , он обозначается S_x .

Выполнение условия (6.16) возможно, если статический момент равняется нулю

$$S_x = \int_A y dA = 0. \quad (6.17)$$

Это означает, что ось Ox проходит через центр тяжести поперечного сечения и потому ось x является нейтральной.

Эпюра распределения нормальных напряжений по сечению балки прямоугольного сечения приведена на рисунке 6.11. Нейтральная ось де-

лит сечение на две зоны: в одной возникают нормальные растягивающие напряжения, во второй – сжимающие. На нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю. В рассматриваемом примере верхние волокна балки растягиваются, нижние – сжимаются.

При прямом изгибе в балке с поперечным сечением, имеющем одну ось симметрии, положение нейтральной оси определяется из условия (6.17). На рисунке 6.12 приведена эпюра напряжений в балке треугольного поперечного сечения.

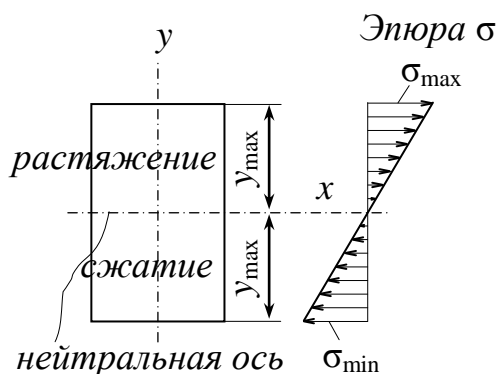


Рисунок 6.11 – Эпюра нормальных напряжений в прямоугольном сечении

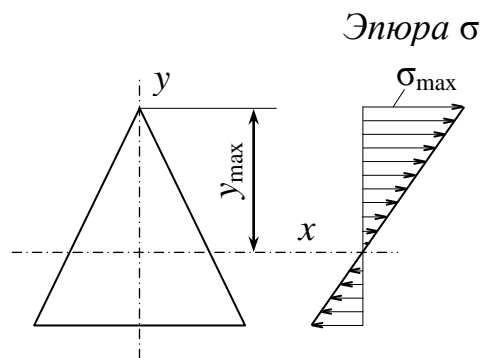


Рисунок 6.12 – Эпюра нормальных напряжений в треугольном сечении

В точках с координатой $y = y_{\max}$ в сечении действуют максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x},$$

где обозначим

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \quad (6.18)$$

Величина W_x называется осевым моментом сопротивления сечения относительно оси x .

Условие прочности при чистом изгибе

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (6.19)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе; определяется по результатам испытания материалов.

При изгибе балки относительно оси y расчетные формулы отличаются индексами и координатой

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} x; \quad \sigma = \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

6.8 Нормальные и касательные напряжения при прямом поперечном изгибе

При поперечном изгибе в сечениях балки действуют изгибающий момент и поперечная сила, а потому, кроме нормальных напряжений в поперечных сечениях возникают и касательные напряжения. По закону парности такие же касательные напряжения возникают и в продольных сечениях.

Наличие касательных напряжений в продольных сечениях подтверждается таким опытом. Рассмотрим деформацию изгиба двух балок (рисунок 6.13), одна из которых составлена из отдельных брусков. При деформации отдельные бруски, составляющие балку, взаимно сдвинутся. В цельной балке сдвига продольных сечений не происходит, что указывает на наличие в продольных плоскостях касательных напряжений, которые противодействуют этим сдвигам.

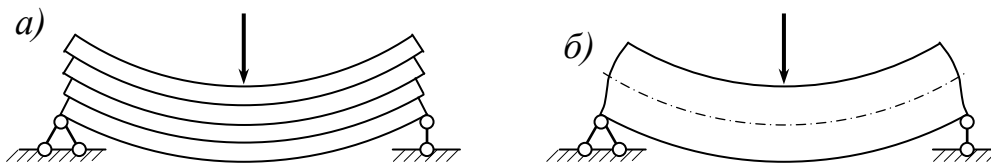


Рисунок 6.13 – Деформация балки, составленной из отдельных брусков (а) и цельной балки (б)

Действие касательных напряжений вызывает сдвиги отдельных волокон относительно друг друга, в результате чего гипотеза плоских сечений при поперечном изгибе не подтверждается, плоские до деформации сечения искривляются (рис. 6.13, б). Однако, теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что влияние сдвигов на распределение нормальных напряжений при поперечном изгибе незначительно и им пренебрегают. Поэтому для определения нормальных напряжений изгиба используют формулу, выведенную для чистого изгиба

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y.$$

Для вывода формулы касательных напряжений мысленно вырежем из балки (рис. 6.14, а, б) элемент длиной dz и дополнительным продольным сечением на расстоянии y от плоскости xOz , рассечем его на две части.

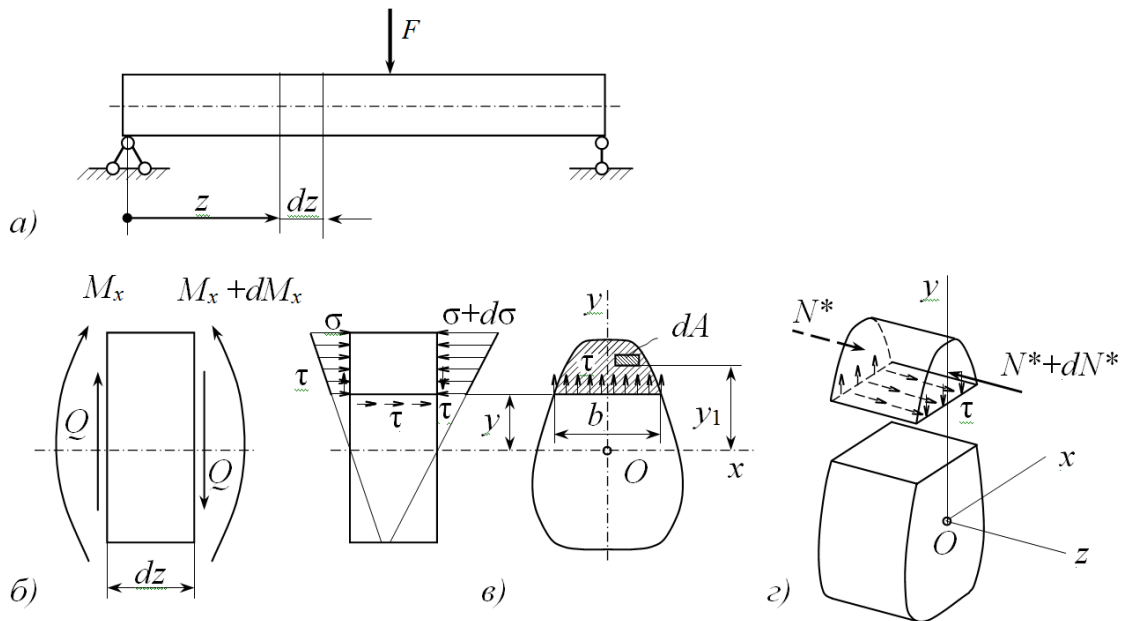


Рисунок 6.14 – К выводу формулы для касательных напряжений при поперечном изгибе

Рассмотрим равновесие одной из них, например, верхней, на которую с обеих сторон действуют сжимающие нормальные напряжения σ . С правой стороны в произвольной элементарной площадке dA с координатой y_1 нормальные напряжения больше нормальных напряжений на такой же площадке с левой стороны на величину $d\sigma_1$, поскольку изгибающий момент по правую сторону больше, чем по левую сторону на величину dM_x

$$d\sigma_1 = \frac{dM_x}{J_x} y_1.$$

Соответственно, разность сжимающих сил, которые действуют на отсеченную часть по правую и по левую сторону, составляет

$$dN = \int_{A_{\text{отс}}} d\sigma_1 dA = \int_{A_{\text{отс}}} \frac{dM_x}{J_x} y_1 dA = \frac{dM_x}{J_x} \int_{A_{\text{отс}}} y_1 dA.$$

Здесь интеграл является статическим моментом площади $A_{\text{отс}}$ (отсеченной части поперечного сечения) относительно оси Ox

$$S_x^{\text{отс}} = \int_{A_{\text{отс}}} y_1 dA.$$

С учетом этого

$$dN = \frac{dM_x}{J_x} S_x^{\text{отс}}.$$

Нормальная сила dN уравнивается касательной силой dT , которую создают касательные напряжения τ в продольной плоскости.

Из условия равновесия (равновесие проекций сил на ось z) имеем

$$dT = dN.$$

Для определения касательных напряжений τ необходимо знать закон их распределения по ширине балки. Для большинства сечений, в которых высота больше ширины, принимается равномерное распределение

$$d\tau = \tau b_y dz,$$

где b_y - ширина балки в сечении с координатой y .

Заменив в уравнении равновесия силы их значениями, после несложных преобразований, получим

$$\tau = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_x^{\text{отс}}}{J_x b_y}.$$

Но $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, поэтому в результате имеем

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{J_x b_y}. \quad (6.20)$$

По закону парности такое же касательное напряжение действует и в поперечном сечении по линии $m-n$.

Порядок определения касательных напряжений по формуле (6.20):

- 1) выбирается поперечное сечение балки;
- 2) определяется поперечная сила и момент инерции сечения относительно нейтральной оси Ox ;
- 3) через точку, в которой необходимо определить касательные напряжения, проводится прямая, параллельная оси Ox определяется ширина балки в этом сечении;
- 4) подсчитывается статический момент $S_x^{\text{отс}}$ дорожкой части сечения относительно оси Ox по формуле

$$S_x^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_c,$$

где $A_{\text{отс}}$ - площадь отсеченной части сечения; y_c - координата центра тяжести отсеченной части сечения;

5) по формуле (6.24) определяются касательные напряжения.

Рассмотрим распределение касательных напряжений в балке прямоугольного сечения с размерами $b \times h$, в котором действует поперечная сила Q_y (рис. 6.15). Момент инерции сечения балки:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Проведем по сечению на расстоянии y $\left(-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}\right)$ прямую 1–1 параллельно оси Ox . Ширина балки $b_y = b = \text{const}$. Площадь и координата вертикальной отсеченной части (на рисунке она заштрихована)

$$A_{отс} = \left(\frac{h}{2} - y\right)b; \quad y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right).$$

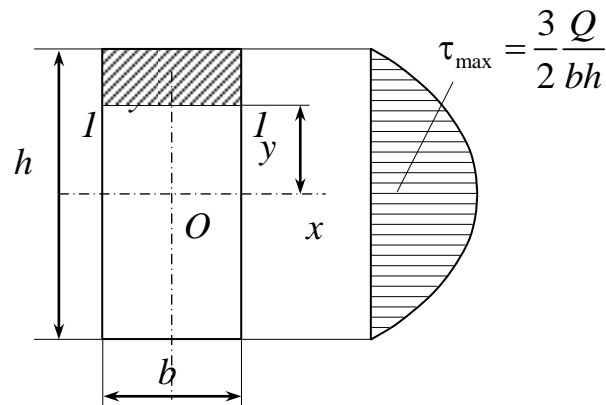


Рисунок 6.15 – Эпюра касательных напряжений в прямоугольном сечении

Статический момент отсеченной части площади и касательные напряжения:

$$S_x^{отс} = A_{отс} y_c = \left(\frac{h}{2} - y\right)b \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right);$$

$$\tau = \frac{Q_y \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{bQ_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Касательные напряжения по высоте сечения изменяются по закону квадратичной параболы:

$$\text{при } y = \pm \frac{h}{2} \quad \tau = 0;$$

при $y = 0$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{2A} = 1,5\tau_{\text{cp}},$$

где A – площадь сечения балки; $A = bh$;

τ_{cp} – среднее напряжение в балке:

$$\tau_{\text{cp}} = \frac{Q_y}{A_{\text{топ}}}.$$

Пример 5.6. Определить максимальное нормальное и касательное напряжения в консольной балке прямоугольного сечения с размерами $b = 0,15$ м; $h = 0,2$ м, нагруженной на свободном конце силой $F = 100$ кН (рис. 5.16).

Решение. Опасным является сечение A , в котором действуют поперечная сила $Q_y = 100$ кН и максимальный изгибающий момент $M_x = 100$ кН·м.

Максимальные нормальные и касательные напряжения в этом сечении

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{100 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{-6} = 100 \text{ МПа},$$

где W_x – осевой момент сопротивления сечения;

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,15 \cdot 0,2^2}{6} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$\tau = \frac{3Q_y}{2A} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,03} \cdot 10^{-6} = 5 \text{ МПа},$$

где A – площадь сечения; $A = b \cdot h = 0,15 \cdot 0,2 = 0,03 \text{ м}^2$.

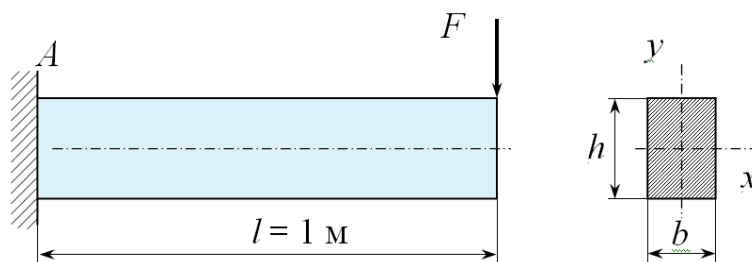


Рисунок 6.16 – Поперечный изгиб консольной балки

Как вытекает из расчета, величина касательных напряжений составляет 5% величины нормальных напряжений. Такое соотношение между нормальными и касательными напряжениями характерно для большинства балок инженерных конструкций, работающих на изгиб.

6.9 Деформации при изгибе

При прямом изгибе под действием внешней нагрузки, которая лежит в плоскости симметрии поперечного сечения балки, ее продольная ось искривляется в той же плоскости, а точки оси перемещаются.

Изогнутая ось балки называется упругой линией, а перемещение точек балки по нормали к недеформированной оси называются прогибами и обозначаются y (рис. 5.17).

Поперечные сечения балки не только перемещаются поступательно, но поворачиваются на угол θ относительно своего первоначального положения. Такой же угол θ образует касательная, проведенная к упругой линии балки в этом же сечении, с продольной осью z .

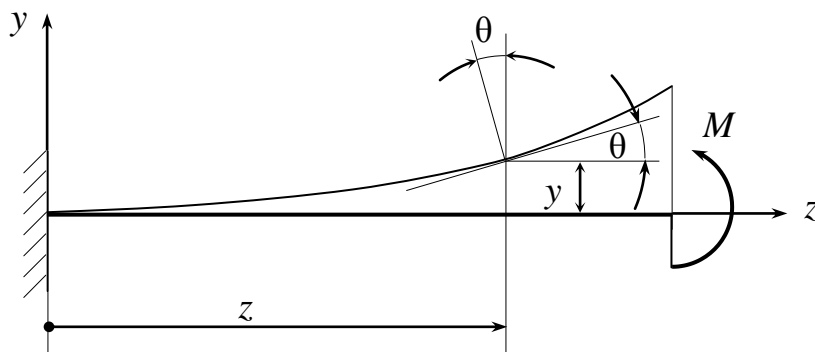


Рисунок 6.17 – Деформации балки при изгибе

Знаки деформаций балки определяются таким образом. При положительном изгибающем моменте (как на рис. 5.18) прогиб y положительный, если он направлен по оси y , направленной вверх; угол поворота сечения θ считается положительным, если он направлен против движения часовой стрелки. На рис. 5.18 прогиб y и угол поворота θ положительные.

Прогибы и углы поворота сечений связаны зависимостью

$$\frac{dy}{dz} = \operatorname{tg} \theta.$$

Для малых углов θ можно принять

$$\frac{dy}{dz} = \theta.$$

При изгибе в сечении действуют изгибающий момент и поперечная сила. Деформация балки, от поперечной силы Q обычно незначительна.

Поэтому при определении деформаций изгиба учитывают только действие изгибающего момента.

При чистом изгибе ($Q_y = 0$, $M_x = \text{const}$) упругая ось балки прогибается по дуге круга радиусом ρ (см. формулу (6.14)).

При прямом поперечном изгибе ($Q_y \neq 0$, $M_x \neq \text{const}$) кривизна упругой линии изменяется по длине балки. Определим деформации балки при прямом поперечном изгибе (без учета поперечных сил).

Величина, обратная радиусу кривизны плоской кривой, равняется

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставив в формулу $\frac{1}{\rho}$ вместо ее значения из (6.14), получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$\frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{EJ_x}.$$

Уравнение справедливо для системы координат, начало которой расположено на левом конце балки, ось y направлена вверх, ось z – вправо.

Прогибы считаются положительными при перемещении оси балки вверх, а углы θ – при повороте сечений против часовой стрелки.

Углы $\theta = \frac{dy}{dz}$ обычно малы, поэтому квадратом производной можно пренебречь. Тогда

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (6.21)$$

Зависимость (5.25) является приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси. Его интегрирование после разделения переменных дает формулы для углов поворота и прогибов сечений балки

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = \int \frac{\dot{I} \bar{\delta}}{EJ_x} dz + C_1;$$

$$y(z) = \int \left(\int \frac{M_x}{EJ_x} dz \right) + C_1 z + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Для балок постоянного сечения $EJ_x = \text{const}$, поэтому

$$\theta(z) = \frac{1}{EJ_x} \left[\int M_x dz \right] + C_1; \quad (6.22)$$

$$y(z) = \frac{1}{EJ_x} \left[\int \left(\int M_x dz \right) \right] + C_1 z + C_2. \quad (6.23)$$

Пример 5.7. Определить угол поворота и прогиб сечения консольной балки длиной l , нагруженной на свободном конце силой F (рис. 6.6, а).

Решение. Изгибающий момент M_x в произвольном сечении балки с координатой z

$$M_x(z) = -Fz.$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$EJ_x \frac{d^2 y}{dz^2} = -Fz.$$

Его интегрирование с учетом $EJ_x = \text{const}$ дает

$$EJ_x \theta = EJ_x \frac{dy}{dz} = -\frac{Fz^2}{2} + C_1;$$

$$EJ_x y = -\frac{Fz^3}{6} + C_1 z + C_2.$$

Произвольные постоянные из условий закрепления балки (в защемлении при $z = l$ $\theta = \frac{dy}{dz} = 0$ и $y = 0$):

$$C_1 = \frac{Fl^2}{2}; \quad C_2 = -\frac{Fl^3}{3}.$$

Углы поворота и прогибы сечений балки

$$\theta(z) = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{Fl^2}{2} - \frac{Fz^2}{2} \right);$$

$$y(z) = \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{Fz^3}{6} + \frac{Fl^2 z}{2} - \frac{Fl^3}{3} \right).$$

На свободном конце балки (при $z = 0$)

$$\theta = \frac{Fl^2}{2EJ_x}; \quad y = -\frac{Fl^3}{3EJ_x}.$$

Значение y отрицательное, а значение θ положительное. Балка прогнется вниз, сечения повернутся против часовой стрелки.

Метод начальных параметров. При непосредственном интегрировании уравнения упругой линии балки, разбитой по условиям нагружения на несколько участков, необходимо для каждого участка определить две произвольные постоянные. При количестве участков более двух задача становится очень трудоемкой.

Метод начальных параметров позволяет при любом числе участков свести решение к определению двух произвольных постоянных: *угла поворота и прогиба в начале координат.*

Рассмотрим балку, находящуюся в равновесии под действием внешних нагрузок и опорных реакций (рис. 6.18).

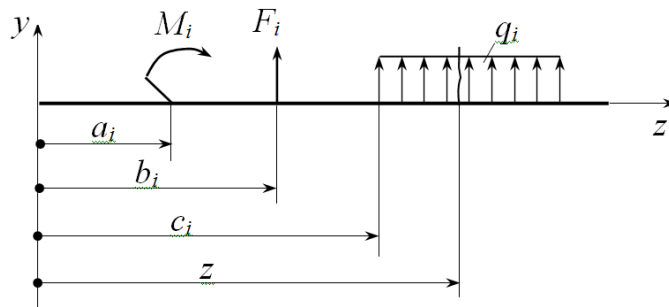


Рисунок 6.18 – Схема приложения нагрузок к балке

Примем начало координат на левом конце балки. Внешние нагрузки, указанные на чертеже, будем считать положительными. Координаты сечений, в которых приложены сосредоточенные моменты M_i и силы F_i , а также левые границы участков с распределенной нагрузкой q_i , обозначим, соответственно, a_i , b_i , c_i .

Распределенная нагрузка q_i приложена от сечения с координатой c_i к рассматриваемому сечению с координатой z .

Определим методом сечений изгибающий момент в сечении балки с координатой z . Для этого суммируем внешние нагрузки, приложенные к балке по левую сторону от сечения, т.е. нагрузки, для которых $(z - a_i) > 0$, $(z - b_i) > 0$ или $(z - c_i) > 0$

$$M_x(z) = \sum M_i + \sum F_i(z - b_i) + \sum q_i \frac{(z - c_i)^2}{2}. \quad (6.24)$$

Подставив значение изгибающего момента из (6.24) в (6.22) и (6.23), после интегрирования получим зависимости для определения перемещений сечения с координатой z

$$\theta(z) = \frac{1}{EJ_x} \left[\sum \frac{M_i(z-a_i)}{1!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^2}{2!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^3}{3!} \right] + C_1;$$

$$y(z) = \frac{1}{EJ_x} \left[\sum \frac{M_i(z-a_i)^2}{2!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^3}{3!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^4}{4!} \right] + C_1 z + C_2 .$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 выразим через значения угла поворота и прогиба балки в начале координат, т.е. из условия

$$\text{при } z=0 \quad \theta = \theta_0; \quad y = y_0,$$

где θ_0, y_0 – угол поворота и прогиб балки в начале координат.

Из уравнений для угла поворота и прогиба балки в начале координат с учетом последнего условия, находим

$$\tilde{N}_1 = \theta_0; \quad C_2 = y_0.$$

Тогда окончательно получим

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left[\sum \frac{M_i(z-a_i)}{1!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^2}{2!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^3}{3!} \right]; \quad (6.25)$$

$$y(z) = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ_x} \left[\sum \frac{M_i(z-a_i)^2}{2!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^3}{3!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^4}{4!} \right] \quad (6.26)$$

Иногда зависимости (6.25) и (6.26) удобнее применять в таком виде

$$EJ_x \theta(z) = EJ_x \theta_0 + \sum \frac{M_i(z-a_i)}{1!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^2}{2!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^3}{3!}; \quad (6.27)$$

$$EJ_x y(z) = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + \sum \frac{M_i(z-a_i)^2}{2!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^3}{3!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^4}{4!}. \quad (6.28)$$

Особенности применения формул (6.27), (6.28):

1) Начало координат располагается на левом конце балки; z – координата сечения, перемещения которого определяются;

2) Суммируются только нагрузки, приложенные по левую сторону от сечения, т.е. такие, для которых

$$(z-a_i) > 0, \quad (z-b_i) > 0 \quad \text{или} \quad (z-c_i) > 0;$$

3) Если правая граница распределенной нагрузки располагается левее рассматриваемого сечения z , то эту нагрузку следует продолжить к сечению z , и на этом же участке приложить такую же распределенную нагрузку, но направленную противоположно;

4) Начальные параметры θ_0 и y_0 определяются из условий закрепления балки; например, для балки с зашпеленным левым концом $\theta_0 = 0$; $y_0 = 0$.

Пример 5.8. Определить перемещение сечений двухпорной балки длиной l , нагруженной посередине силой F (рисунок 6.19).

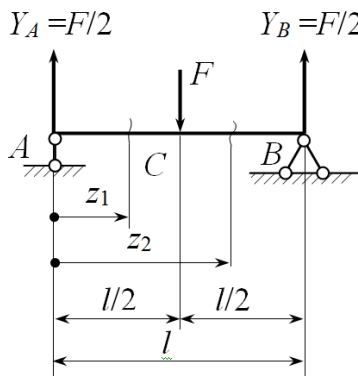


Рисунок 6.19 – К определению перемещений методом начальных параметров

Реакции опор $Y_A = Y_B = \frac{F}{2}$.

Начальные параметры $\theta_0 = \theta_A$; $y_0 = y_A = 0$.

По условиям нагружения разобьем балку на два участка: AC и BC .

Углы поворота и прогибы сечений:

– участок AC $\left(0 \leq z_1 \leq \frac{l}{2}\right)$

$$EJ_x \theta = EJ_x \theta_0 + \frac{F}{2} \cdot \frac{z_1^2}{2!} = EJ_x \theta_0 + \frac{1}{4} F z_1^2;$$

$$EJ_x y = EJ_x \theta_0 z_1 + \frac{F}{2} \cdot \frac{z_1^3}{3!} = EJ_x \theta_0 z_1 + \frac{1}{12} F z_1^3;$$

– участок BC $\left(\frac{l}{2} \leq z_2 \leq l\right)$

$$EJ_x \theta = EJ_x \theta_0 + \frac{F}{2} \cdot \frac{z_2^2}{2!} - F \cdot \frac{\left(z_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2!} = EJ_x \theta_0 + \frac{1}{4} F z_2^2 - \frac{1}{2} \left(z_2 - \frac{l}{2}\right)^2;$$

$$EJ_x y = EJ_x \theta_0 z_2 + \frac{F}{2} \cdot \frac{z_2^3}{3!} - F \cdot \frac{\left(z_2 - \frac{l}{2}\right)^3}{3!} = EJ_x \theta_0 z_2 + \frac{1}{12} F z_2^3 - \frac{1}{6} \left(z_2 - \frac{l}{2}\right)^3.$$

Неизвестное значение начального параметра θ_0 определим из условия отсутствия прогиба под опорой B , т.е. при $z = l$ $y_B = 0$

$$EJ_x y_A = EJ_x \theta_0 l + \frac{1}{12} F l^3 - \frac{1}{6} F \left(l - \frac{l}{2}\right)^3 = 0.$$

Откуда

$$EI_x \theta_0 = -\frac{1}{16} F l^2; \quad \theta_0 = -\frac{F l^2}{16 E J_x}.$$

Подставив значение θ_0 в уравнения углов поворота и прогибов, окончательно получим:

– для участка AC $\left(0 \leq z_1 \leq \frac{l}{2}\right)$

$$\theta = -\frac{F(l^2 - 4z_1^2)}{16EJ_x}; \quad y = -\frac{F(3l^2 - 4z_1^2)}{48EJ_x};$$

– для участка BC $\left(\frac{l}{2} \leq z_2 \leq l\right)$

$$\theta = -\frac{F}{16EJ_x} (3l^2 - 4z_2^2 - 8z_2 l); \quad y = -\frac{F}{48J_x} (9l^2 + 4z_2^3 - 12z_2^2 l - l^3).$$

Деформация балки в середине пролета при $z = \frac{l}{2}$:

$\theta = 0$ (это очевидный результат);

$$y = -\frac{F l^3}{48 E J_x}.$$

7 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

7.1 Основные сведения

При простых видах деформации (растяжение - сжатие, сдвиг, кручение, чистый изгиб) в поперечных сечениях стержня действует один силовой фактор: продольная или поперечная сила, крутящий или изгибающий момент. На практике большинство элементов конструкций подвергаются действию внешних сил, вызывающих одновременно действие двух и более силовых факторов. Различные комбинации простых деформаций называются *сложным сопротивлением*.

В общем случае нагружения в поперечных сечениях стержня действуют шесть силовых факторов: N , Q_x , Q_y , M_x , M_y , M_k .

При расчетах на сложное сопротивление применяют принцип независимости действия сил: *напряжение (деформация) от нескольких сил равно сумме напряжений (деформаций) от каждой силы в отдельности.*

Принцип независимости действия сил можно применять при выполнении условий:

- напряжения в какой-либо части стержня от одной или нескольких сил не превышают предел пропорциональности $\sigma_{пл}$;

- существует линейная зависимость между деформациями или перемещениями и нагрузкой.

Таким образом, сложный вид деформации рассматривают как сумму простых деформаций, при которых в сечениях стержня действует только один внутренний силовой фактор.

На практике одновременное действие всех силовых факторов встречается редко. Наиболее распространены комбинации нагружений:

- косою изгиб;
- внецентренное растяжение или сжатие;
- изгиб с кручением.

7.2 Расчет балки при косом изгибе

Косым изгибом называют изгиб, при котором плоскость действующего в сечении изгибающего момента (*силовая плоскость*), проходит через центр тяжести сечения и не совпадает ни с одной из главных плоскостей стержня (рис. 7.1). При косом изгибе изогнутая ось балки представляет собой плоскую кривую, не лежащую в силовой плоскости.

На рис. 7.1 показано: P - плоскость действия нагрузки (*силовая плоскость*); φ - угол наклона силовой плоскости к оси u ; u ; v - главные центральные оси сечения балки.

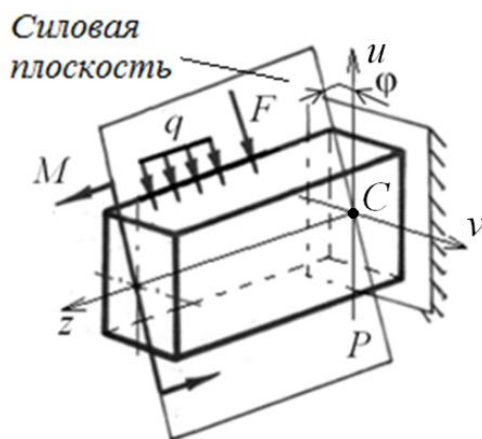


Рисунок 7.1 – Косой изгиб балки

При косом изгибе полную поперечную силу Q и полный изгибающий момент M в поперечных сечениях балки раскладывают на составляющие поперечные силы Q_v , Q_u и изгибающие моменты M_v , M_u , действующие по главным центральным осям инерции u и v (рис. 7.2). Вектор момента M перпендикулярен силовой плоскости. Косой изгиб представляют как совместное действие двух плоских изгибов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

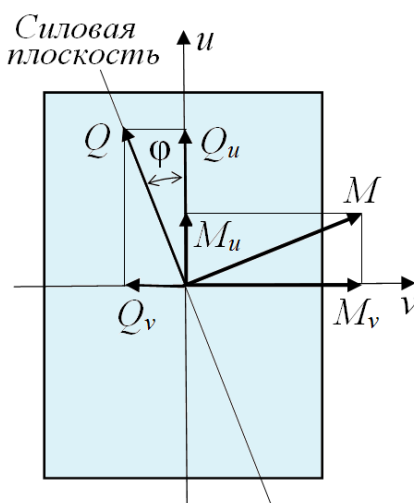


Рисунок 7.2 – Внутренние силовые факторы в сечении балки

Внутренние силовые факторы в сечении балки определяют аналогично плоскому изгибу: поперечные силы Q_v , Q_u в сечении балки определяют суммированием проекций внешних поперечных нагрузок, соответственно, на оси v и u , приложенных по одну сторону от сечения; изгибающие моменты M_v , M_u в сечении балки определяют суммированием проекций моментов внешних нагрузок относительно центра сечения, соответственно, на оси v и u , приложенных по одну сторону от сечения.

Правила знаков для внутренних усилий (см. п. 6.4) применительно к косому изгибу можно изложить в следующем виде: *изгибающие моменты положительны, если вызывают растяжение в положительном квадранте координатной системы vOu ; поперечные силы положительны, если под их действием отсеченный элемент поворачивается по часовой стрелке.*

Полные поперечная сила и изгибающий момент связаны с составляющими по главным осям инерции

$$Q = \sqrt{Q_v^2 + Q_u^2}; \quad (7.1)$$

$$M = \sqrt{M_v^2 + M_u^2}. \quad (7.2)$$

Нормальные напряжения в произвольной точке сечения с координатами v и u определяют как алгебраическую сумму напряжений от составляющих полного момента M_v и M_u

$$\sigma = \sigma_{M_v} + \sigma_{M_u} = \pm \frac{M_v}{J_v} u \pm \frac{M_u}{J_u} v. \quad (7.3)$$

Таким образом, расчет на кривой изгиб с применением принципа независимости действия сил сводится к расчету двух прямых изгибов с последующим алгебраическим суммированием напряжений.

Для поперечных сечений, имеющих две оси симметрии (например, на рис. 7.2), напряжения в наиболее удаленных угловых точках с координатами v_{\max} и u_{\max} равны

$$\sigma = \pm \frac{M_v}{J_v} u_{\max} \pm \frac{M_u}{J_u} v_{\max} = \pm \frac{M_v}{W_v} \pm \frac{M_u}{W_u}. \quad (7.4)$$

При проведении расчетов на прочность условие прочности составляется для опасной точки поперечного сечения, т.е. для точки, в которой нормальные напряжения достигают максимальных значений. Самой нагруженной точкой в сечении произвольной формы является точка, наиболее удаленная от *нейтральной* (нулевой) *линии*, разделяющей растянутую и сжатую зоны сечения.

Положив в (7.3) нормальные напряжения равными нулю, получим уравнение нейтральной линии

$$\sigma = \frac{M_v}{J_v} u + \frac{M_u}{J_u} v = 0. \quad (7.5)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат (рис. 7.3). Тангенс угла β наклона прямой к оси v

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u}{v} = -\frac{J_v}{J_u} \cdot \frac{M_u}{M_v} = -\frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg} \varphi;$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg} \varphi. \quad (7.6)$$

Для определения опасных точек сечения следует построить касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии. Точки касания и будут являться опасными (точки A и B на рис. 7.3).

Для некоторых сечений (прямоугольник, двутавр, швеллер и др.) наиболее напряженные точки расположены в углах этих сечений, т.е. их можно найти без определения положения нейтральной линии.

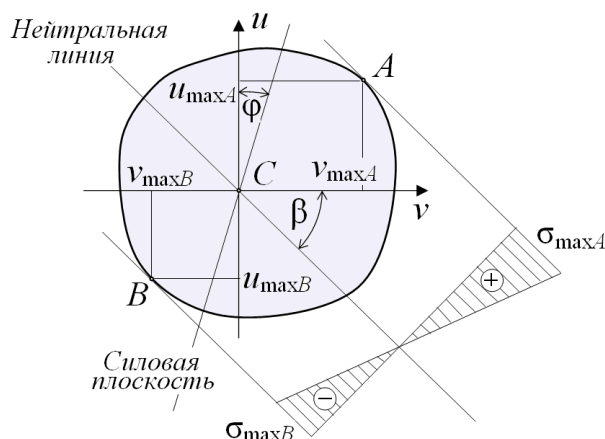


Рисунок 7.3 - Положение нейтральной линии при косом изгибе

Свойства нейтральной линии

1) Если $J_v \neq J_u$ то, $\beta \neq \varphi$, то есть силовая плоскость и нейтральная линия не являются перпендикулярными.

2) Если $J_v = J_u$ то $\text{tg } \beta = -\text{tg } \varphi$, то есть нейтральная линия и силовая плоскость перпендикулярны. В этом случае стержень испытывает плоский изгиб (например, стержни с сечением круг, кольцо, квадрат).

3) Знак «-» в формуле (7.6) указывает, что силовая плоскость и нейтральная линия при косом изгибе проходят через противоположные квадранты.

Условия прочности стержня составляют в зависимости от свойств материала.

Хрупкий материал имеет разные механические свойства при растяжении и сжатии: плохо сопротивляется растяжению и хорошо - сжатию. Поэтому для хрупкого материала используют два условия прочности: для опасной точки, где имеет место растяжение (точка А на рис.7.3), и для точки, где имеет место сжатие (точка В на рис.7.3)

$$\sigma_{pA} = \frac{M_v}{J_v} u_{\max A} + \frac{M_u}{J_u} v_{\max A} \leq [\sigma_p]; \quad (7.7)$$

$$\sigma_{cB} = \left| \frac{M_v}{J_v} u_{\max B} + \frac{M_u}{J_u} v_{\max B} \right| \leq [\sigma_c]. \quad (7.8)$$

Для пластичного материала, который одинаково сопротивляется и растяжению и сжатию, используют одно условие прочности для точки поперечного сечения, где имеют место максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения.

При расчетах на прочность касательными напряжениями от поперечных сил пренебрегают, так как их влияние незначительно.

Пример 7.1. Построить эпюру нормальных напряжений в сечении консольной балки у заделки, нагруженной вертикальной силой $F = 0,8$ кН, проходящей через центр тяжести сечения (рис. 7.4). Сечение балки – неравнобедренный уголок из примера 4.6.

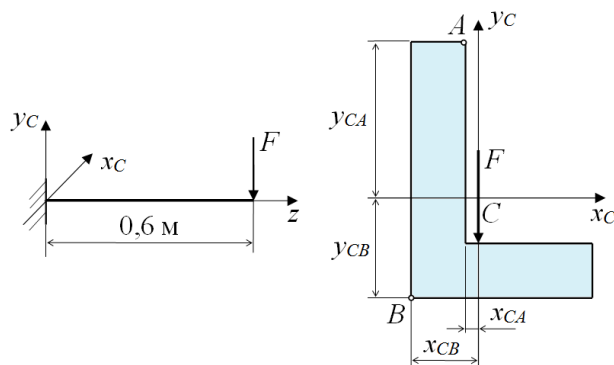


Рисунок 7.4 – Расчетная схема балки

Решение. Главные центральные моменты инерции сечения (см. пример 4.6)

$$J_u = 99 \text{ см}^4; \quad J_v = 557 \text{ см}^4.$$

Угол наклона оси u к оси y_C (см. рис. 4.8 и 7.5)

$$\varphi = \alpha_0 = -22,15^\circ.$$

Угол наклона нейтральной линии к оси x_C

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg} \varphi = -\frac{557}{99} \operatorname{tg} (-22,15^\circ) = 2,29;$$

$$\beta = \operatorname{arctg} 2,29 = 66,41^\circ.$$

Под углом β к оси v проводим нейтральную линию (рис. 7.5, а). Касательные к сечению, параллельные нейтральной линии, и определяют наиболее удаленные точки A и B от нейтральной линии.

Координаты точек A и B относительно осей x_C, y_C (см. рис. 4.8 и 7.5, а)

$$x_{CA} = -a_1 - b_1 / 2 = -1,33 - 2 / 2 = -2,33 \text{ см};$$

$$y_{CA} = h_1 / 2 + l_1 = 12 / 2 + 1,67 = 7,67 \text{ см};$$

$$x_{CB} = a_2 + b_2 / 2 = 2,67 + 6 / 2 = 5,67 \text{ см};$$

$$y_{CB} = -h_2 / 2 - l_2 = -2 / 2 - 3,33 = -4,33 \text{ см}.$$

Координаты точек A и B относительно осей v, u

$$v_A = x_{CA} \cos \varphi + y_{CA} \sin \varphi = -2,33 \cos(-22,15^\circ) + 7,67 \sin(-22,15^\circ) = -5,05 \text{ см};$$

$$u_A = y_{CA} \cos \varphi - x_{CA} \sin \varphi = 7,67 \cos(-22,15^\circ) - (-2,33) \sin(-22,15^\circ) = 6,23 \text{ см};$$

$$v_B = x_{CB} \cos \varphi + y_{CB} \sin \varphi = 5,67 \cos(-22,15^\circ) + (-4,33) \sin(-22,15^\circ) = 6,88 \text{ см};$$

$$u_B = y_{CB} \cos \varphi - x_{CB} \sin \varphi = (-4,33) \cos(-22,15^\circ) - 5,67 \sin(-22,15^\circ) = -1,87 \text{ см}.$$

Составляющие силы F , действующие в главных центральных плоскостях балки (см. рис. 7.5, а)

$$F_u = -F \cos \varphi = -0,8 \cdot \cos(22,15^\circ) = -0,74 \text{ кН};$$

$$F_v = F \sin \varphi = 0,8 \cdot \sin(22,15^\circ) = 0,30 \text{ кН.}$$

Изгибающий моменты в сечении у заделки, действующие в главных центральных плоскостях балки (рис. 7.5, б)

$$M_u = F_v \cdot 0,6 = 0,30 \cdot 0,6 = 0,18 \text{ кНм;}$$

$$M_v = F_u \cdot 0,6 = -0,74 \cdot 0,6 = -0,44 \text{ кНм.}$$

Нормальные напряжения в точках *A* и *B*

$$\sigma_A = \frac{M_v}{J_v} u_A + \frac{M_u}{J_u} v_A = \left(\frac{0,44 \cdot 10^3}{557 \cdot 10^{-8}} 6,23 \cdot 10^{-2} + \frac{0,18 \cdot 10^3}{99 \cdot 10^{-8}} 5,05 \cdot 10^{-2} \right) \cdot 10^{-6} = 14,1 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_B = -\frac{M_v}{J_v} u_B - \frac{M_u}{J_u} v_B = \left(-\frac{0,44 \cdot 10^3}{557 \cdot 10^{-8}} 1,87 \cdot 10^{-2} - \frac{0,18 \cdot 10^3}{99 \cdot 10^{-8}} 6,88 \cdot 10^{-2} \right) \cdot 10^{-6} = -14,0 \text{ МПа.}$$

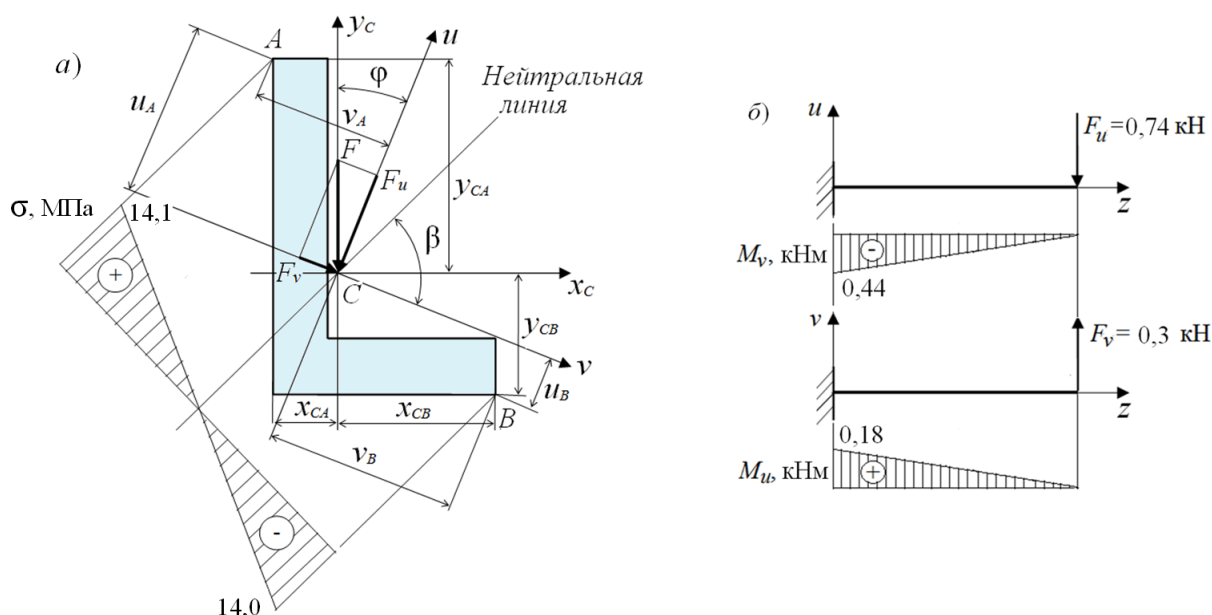


Рисунок 7.5 – Эпюры нормальных напряжений в сечении (а) и эпюры изгибающих моментов балки (б)

Пример 7.2. Двутавровая балка № 60, работающая на изгиб в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью стенки, отклонилась от вертикали на угол $\varphi = 1^\circ$ (рис. 7.6). Определить связанное с этим увеличение наибольших нормальных напряжений.

Геометрические характеристики балки: $W_y = 182 \text{ см}^3$, $W_x = 2560 \text{ см}^3$.

Решение. Отклонение оси у двутавра от вертикали привело к возникновению косоуго изгиба и появлению изгибающих моментов M_x и M_y (рис. 7. 6).

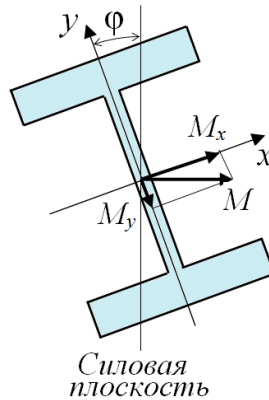


Рисунок 7.7 – Внутренние изгибающие моменты при косом изгибе

Оси x и y – оси симметрии сечения и являются главными центральными осями. Изгибающие моменты

$$M_x = M \cos \varphi = M \cos(1^\circ) = 0,9998M ;$$

$$M_y = M \sin \varphi = M \sin(1^\circ) = 0,0175M .$$

Максимальные напряжения при косом изгибе

$$\sigma_{\max 1} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{0,9998M}{2560} + \frac{0,0175M}{182} = 4,87 \cdot 10^{-4} M .$$

Максимальные напряжения при прямом изгибе

$$\sigma_{\max 2} = \frac{M}{W_x} = \frac{M}{2560} = 3,91 \cdot 10^{-4} M .$$

Отношение максимальных напряжений при косом и прямом изгибе

$$\frac{\sigma_{\max 2}}{\sigma_{\max 1}} = \frac{4,87 \cdot 10^{-4} M}{3,91 \cdot 10^{-4} M} = 1,246 .$$

Из-за отклонения оси двутавра от вертикали на 1° максимальные напряжения при косом изгибе возрастут на 24,6 %.

Полное перемещение δ центра сечения стержня при косом изгибе, как следует из принципа независимости действия сил и представления косоугольного изгиба комбинацией двух плоских изгибов, равно геометрической сумме перемещений, вызванных каждым плоским изгибом в отдельности (рис. 7.7)

$$\delta = \sqrt{\delta_v^2 + \delta_u^2} , \quad (7.9)$$

где δ_v ; δ_u – перемещения в главных плоскостях стержня.

Определение δ_v и δ_u рассмотрено в п. 6.10. Так как перемещения δ пропорциональны отношению M/EJ , то угол γ наклона вектора полного перемещения к оси u с учетом (7.6)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\delta_u}{\delta_v} = \frac{M_u}{EJ_u} : \frac{M_v}{EJ_v} = \frac{J_v}{J_u} \cdot \frac{M_u}{M_v} = -\operatorname{tg} \beta ;$$

Или
$$\gamma = -\varphi. \quad (7.10)$$

Из (7.10) следует, что при косом изгибе смещение центра сечения происходит не в силовой плоскости, а в направлении нормали к нейтральной линии.

При косом изгибе стержня нагрузками, расположенными в одной плоскости, упругая линия является плоской кривой, несовпадающей с силовой плоскостью.

Если силы и пары сил, изгибающие стержень, располагаются в разных плоскостях, то упругая линия является пространственной кривой.

7.3 Внецентренное сжатие или растяжение

Внецентренное растяжение или сжатие вызывается внешними продольными силами, равнодействующая которых параллельна продольной оси, но не совпадает с этой осью. Этот вид нагружения распространен, так как в реальных условиях невозможно приложить растягивающую нагрузку точно в центре тяжести поперечного сечения.

Внецентренное растяжение (сжатие) испытывают короткие стержни.

На рис. 7.9 приведен внецентренно растянутый стержень. Внешняя продольная сила F приложена в точке K с координатами v_K и u_K (v ; u – главные центральные оси сечения). Внутренние силовые факторы в произвольном поперечном сечении стержня с координатой z ($0 \leq z \leq l$):

- нормальная сила
$$N = F;$$
- изгибающие моменты
$$M_v = F u_K; \quad (7.11)$$

$$M_u = F v_K.$$

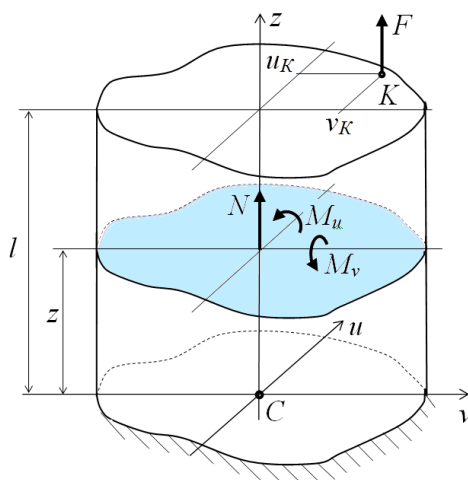


Рисунок 7.9 – Внецентренно растянутый стержень

Внутренние силовые факторы не зависят от координаты z , то есть все поперечные сечения равноопасны, так как в них действуют одинаковые силовые факторы N , M_v , M_u и, поэтому, нет необходимости в построении эпюр внутренних силовых факторов.

Нормальные напряжения в поперечном сечении в точке с произвольными координатами v , u по принципу независимости действия сил

$$\sigma(v;u) = \frac{F}{A} + \frac{M_v}{J_v} u + \frac{M_u}{J_u} v,$$

где A ; J_v ; J_u – площадь и осевые моменты инерции поперечного сечения.

Или с учетом (7.11)

$$\sigma(v;u) = \frac{F}{A} + \frac{F u_K u}{J_v} + \frac{F v_K v}{J_u} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{u_K u}{J_v} + \frac{v_K v}{J_u} \right).$$

Или с учетом, что $J_v = i_v^2 A$ и $J_u = i_u^2 A$

$$\sigma(v;u) = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{u_K u}{i_v^2} + \frac{v_K v}{i_u^2} \right), \quad (7.12)$$

где i_v ; i_u – радиусы инерции поперечного сечения.

В формуле (7.12) перед скобкой при растягивающей силе ставится знак плюс, при сжимающей силе – минус.

Напряжения в (7.12) зависят от координат в первой степени, следовательно трехмерный график $\sigma(v;u)$ (эпюра распределения нормальных напряжений по сечению стержня) представляет собой плоскость, которую называют *плоскостью напряжений*. На рис. 7.10 приведен трехмерный график $\sigma(v;u)$. Для наглядности изображения принята прямоугольная форма поперечного сечения стержня.

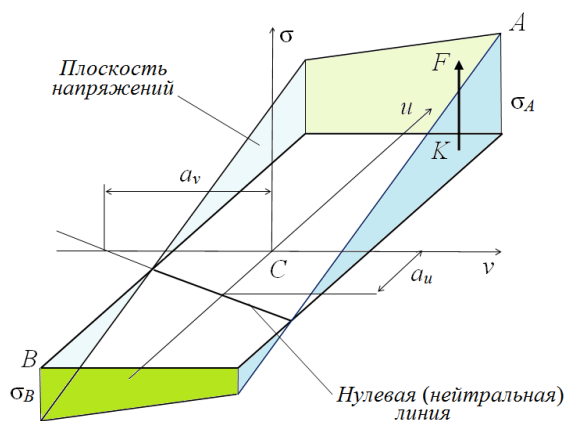


Рисунок 7.10 – График $\sigma(v;u)$

Плоскость напряжений пересекает плоскость $\sigma(v;u) = 0$ по линии, которая называется *нулевой (нейтральной) линией*. Положив в (7.12) $\sigma(v;u) = 0$, получим уравнение нулевой линии

$$1 + \frac{u_K u}{i_v^2} + \frac{v_K v}{i_u^2} = 0. \quad (7.13)$$

Нейтральная линия при внецентренном растяжении и сжатии не проходит через центр тяжести сечения и отсекает на главных центральных осях v , u отрезки a_v и a_u . Полагая последовательно в (7.13) $v = 0$ и $u = 0$, получим

$$a_v = -\frac{i_v^2}{u_K}; \quad a_u = -\frac{i_u^2}{v_K}. \quad (7.14)$$

Из последних формул следуют следующие закономерности, связывающие положения точки приложения силы и нейтральной линии, которые удобно использовать для анализа решения задачи:

- нейтральная линия всегда расположена в квадранте, противоположном тому, в котором находится точка приложения силы;
- если точка приложения силы находится на одной из главных осей, то нейтральная линия перпендикулярна этой оси;
- если точка приложения силы приближается к центру тяжести сечения, то нейтральная линия удаляется от него;
- наибольшие по величине нормальные напряжения возникают в точках поперечного сечения наиболее удаленных от нулевой линии.

Пример 7.3. Чугунный стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 7.11, $a = 3$ см, $b = 2$ см, сжимается продольной силой $F = 25$ кН, приложенной в точке A .

Построить нейтральную линию и определить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении.

Решение. Разбиваем сечение на элементы: 1 - прямоугольник с основанием $b_1 = a + b = 3 + 2 = 5$ см и высотой $h_1 = 2b = 2 \cdot 2 = 4$ см, 2 - два прямоугольника с основанием $b_2 = 2a = 2 \cdot 3 = 6$ см и высотой $h_2 = b = 2$ см (1; 2 - индексы элементов сечения).

Площади элементов

$$A_1 = b_1 h_1 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ см}^2; \quad A_2 = b_2 h_2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ см}^2.$$

Через центры тяжести элементов C_1 и C_2 проводим оси x , y .

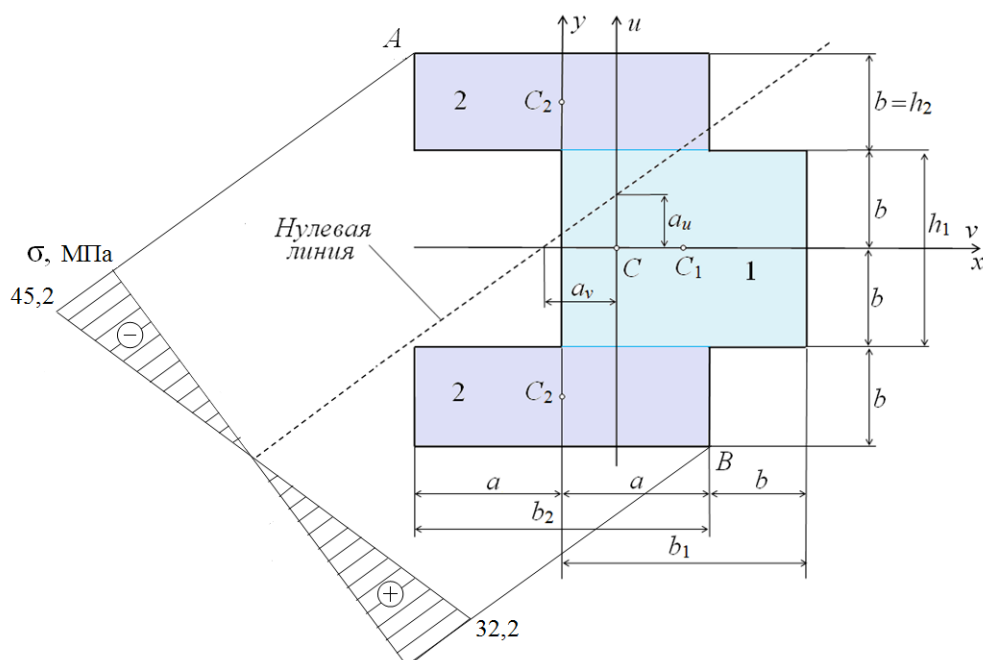


Рисунок 7.11 – Сечение сжатого стержня

Определим координаты центра C тяжести сечения относительно осей x, y

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i x_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{20(5/2) + 12 \cdot 0}{20 + 2 \cdot 12} = 1,136 \text{ см};$$

$y_C = 0$ см, так как ось x – ось симметрии.

Через центр C тяжести сечения с координатами $x_C = 1,136$ см и $y_C = 0$ см проводим главные центральные оси v и u (оси v и x совпадают).

Расстояния от центров тяжести элементов до главных центральных осей v и u

$$p_1 = (a + b) / 2 - x_{1C} = (3 + 2) / 2 - 1,136 = 1,364 \text{ см};$$

$$p_2 = x_{1C} = 1,136 \text{ см};$$

$$l_1 = 0; \quad l_2 = 1,5 b = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ см}.$$

Моменты инерции элементов и сечения относительно главных центральных осей v и u

$$J_v^{(1)} = J_x^{(1)} + l_1^2 A_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + l_1^2 A_1 = \frac{5 \cdot 4^3}{12} + 0 \cdot 20 = 26,67 \text{ см}^4;$$

$$J_v^{(2)} = J_x^{(2)} + l_2^2 A_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + l_2^2 A_2 = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 3^2 \cdot 12 = 112 \text{ см}^4;$$

$$J_v = J_v^{(1)} + 2J_v^{(2)} = 26,67 + 2 \cdot 112 = 250,67 \text{ см}^4;$$

$$J_u^{(1)} = J_y^{(1)} + p_1^2 A_1 = \frac{b_1^3 h_1}{12} + p_1^2 A_1 = \frac{5^3 \cdot 4}{12} + 1,364^2 \cdot 20 = 78,88 \text{ см}^4;$$

$$J_u^{(2)} = J_y^{(2)} + p_2^2 A_2 = \frac{b_2^3 h_2}{12} + p_2^2 A_2 = \frac{6^3 \cdot 2}{12} + 1,136^2 \cdot 12 = 51,49 \text{ см}^4;$$

$$J_u = J_u^{(1)} + 2J_u^{(2)} = 78,88 + 2 \cdot 51,49 = 181,86 \text{ см}^4;$$

Осевые моменты инерции поперечного сечения.

$$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A_1 + 2A_2}} = \sqrt{\frac{250,67}{20 + 2 \cdot 12}} = 2,39 \text{ см};$$

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{A_1 + 2A_2}} = \sqrt{\frac{181,86}{20 + 2 \cdot 12}} = 2,03 \text{ см}.$$

Координаты точки приложения силы F

$$v_A = -(a + x_C) = -(3 + 1,136) = -4,136 \text{ см};$$

$$u_A = 2b = 2 \cdot 2 = 4 \text{ см}.$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях v и u

$$a_v = -\frac{i_v^2}{u_A} = -\frac{2,39^2}{4} = -1,43 \text{ см};$$

$$a_u = -\frac{i_u^2}{v_A} = -\frac{2,03^2}{-4,136} = 1,00 \text{ см}.$$

Вдоль осей v и u откладываем отрезки a_v и a_u , через концы которых проводим нулевую линию. Проводим касательные к сечению, параллельные нулевой линии, и определяем наиболее удаленные от нулевой линии точки A и B , в которых действуют наибольшие напряжения.

Наибольшее сжимающее напряжение в точке A

$$\sigma_A = -\left(\frac{F}{A} + \frac{Fu_A u_A}{J_v} + \frac{Fv_A v_A}{J_u} \right) =$$

$$= -\left(\frac{25000}{44 \cdot 10^{-4}} + \frac{25000 \cdot 0,04 \cdot 0,04}{250,67 \cdot 10^{-8}} + \frac{25000 \cdot 0,04136 \cdot 0,04136}{181,86 \cdot 10^{-8}} \right) \cdot 10^{-6} = -45,2 \text{ МПа}.$$

Наибольшее растягивающее напряжение в точке B

$$\sigma_B = \frac{F}{A} + \frac{Fu_A u_B}{J_v} + \frac{Fv_A v_B}{J_u} =$$

$$= \left(\frac{25000}{44 \cdot 10^{-4}} + \frac{25000 \cdot 0,04 \cdot 0,04}{250,67 \cdot 10^{-8}} + \frac{25000 \cdot 0,04136 \cdot 0,04136}{181,86 \cdot 10^{-8}} \right) \cdot 10^{-6} = 32,2 \text{ МПа},$$

где v_B ; u_B - координаты точки B ;

$$v_B = a - x_C = 3 - 1,136 = 1,864 \text{ см}; \quad u_B = 2b = 2 \cdot 2 = 4 \text{ см}.$$

7.4 Изгиб с кручением

Изгиб с кручением – вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении стержня возникают изгибающие и крутящий моменты. Изгибу с кручением подвергаются валы механических передач, оси моторвагонов электротранспорта, коленчатые валы и др..

Рассмотрим стержень, на который в плоскости поперечного сечения действует внешняя сила F , не пересекающая продольную ось z (рис. 7.12, а). Силу разложим на ее составляющие F_v , F_u (v ; u - главные центральные оси сечения).

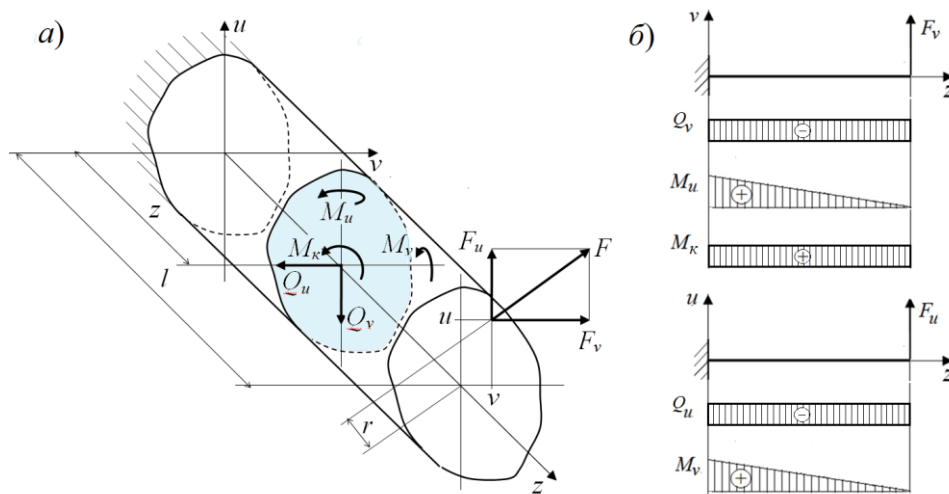


Рисунок 7.12 – Стержень

Методом сечений определим внутренние усилия в произвольном сечении z ($0 \leq z \leq l$):

- поперечные силы $Q_v = -F_v$;

$$Q_u = -F_u;$$

- изгибающие моменты $M_v = F_u z$; (7.15)

$$M_u = F_v z;$$

- крутящий момент $M_k = F r$.

При $z = 0$ $Q_v = -F_v$; $Q_u = -F_u$; $M_v = 0$; $M_u = 0$; $M_k = F r$.

При $z = l$ $Q_v = -F_v$; $Q_u = -F_u$; $M_v = F_u l$; $M_u = F_v l$; $M_k = F r$.

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 7.12, б.

От поперечных сил и крутящего момента возникают касательные напряжения, от изгибающих моментов – нормальные напряжения. В

расчетах на прочность касательными напряжениями от поперечных сил пренебрегают, учитывают только три момента: крутящий и два изгибающих. От них возникают три напряжения: одно касательное и два нормальных.

Нормальные напряжения от действия изгибающих моментов M_v и M_u в поперечном сечении в точке с произвольными координатами v , u по принципу независимости

$$\sigma(v;u) = \pm \frac{M_v}{J_v} u \pm \frac{M_u}{J_u} v, \quad (7.16)$$

где J_v ; J_u – осевые моменты инерции поперечного сечения.

Знак «+» ставится для растянутых волокон, знак «-» для сжатых волокон.

Касательные напряжения от действия крутящего момента M_k в поперечном сечении в точке с произвольным радиусом-вектором r

$$\tau(r) = \frac{M_k}{J_p} r, \quad (7.17)$$

где J_p – полярный момент инерции поперечного сечения.

Как следует из (7.16) и (7.17) наибольшие нормальные напряжения действуют в наиболее удаленных точках от центральных главных осей, а касательные – от центра тяжести сечения. Эпюры напряжений в сечении стержня, построенные по (7.16) и (7.17), приведены на рис. 7.13. Для наглядности принято прямоугольное сечение.

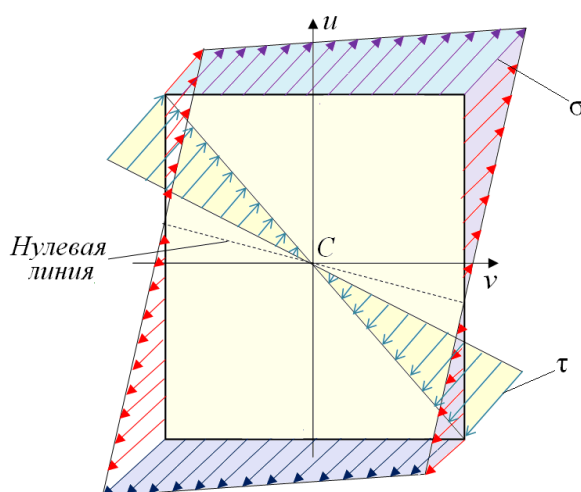


Рисунок 7.13 – Эпюры напряжений в прямоугольном сечении стержня при изгибе с кручением

Пример 7.4. Определить максимальные нормальные и касательные напряжения в сечении вала под зубчатым колесом, если силы в зацеплении колесе $F_t = 5,3$ кН, $F_r = 1,9$ кН, диаметр вала $d_g = 30$ мм, расстояние между опорами вала $l = 100$ мм (рис. 7.14, а). Крутящий момент сил в зацеплении уравнивается вращающим моментом $T = 220$ Нм, приложенным к хвостовику вала.

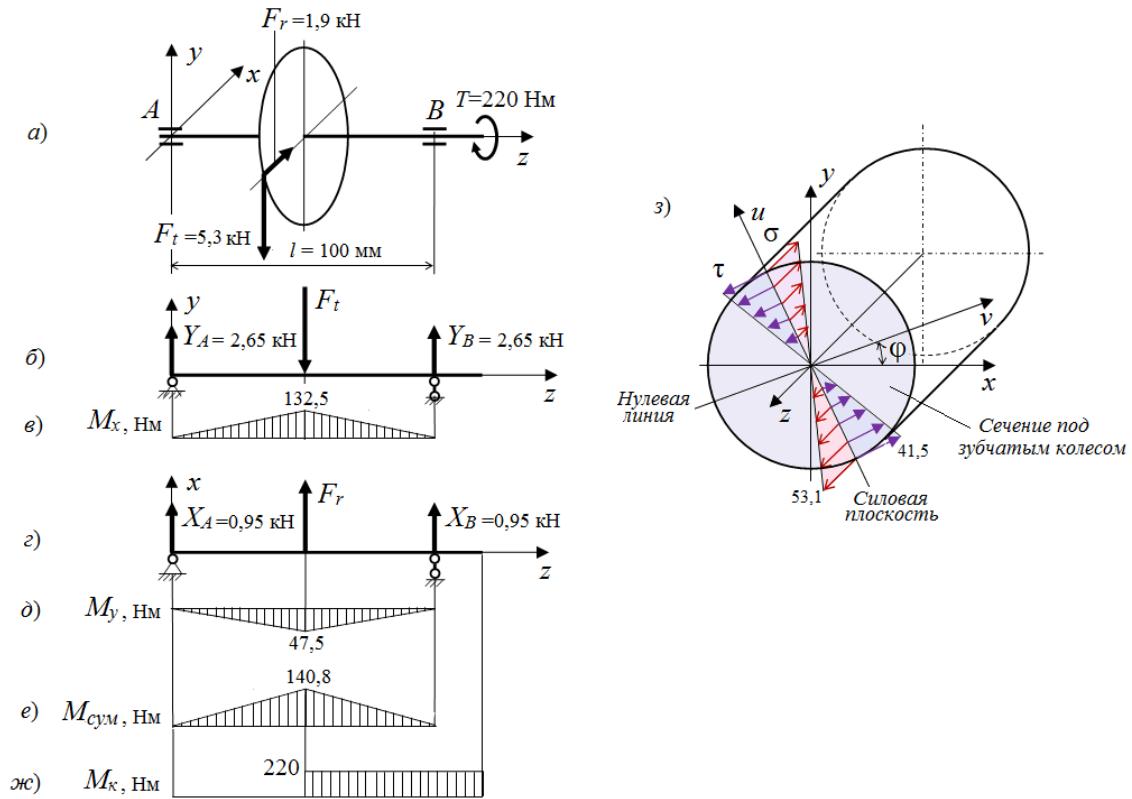


Рисунок 7.14 Расчет напряжений в сечении вала под зубчатым колесом

Решение. Расчет проводим методом суперпозиции: отдельно рассматриваем нагрузки в вертикальной yOz и горизонтальной xOz плоскостях.

Плоскость yOz (рис. 7.14, б). Опорные реакции

$$Y_A = Y_B = Ft / 2 = 5,3 / 2 = 2,65 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент в сечении вала под колесом

$$M_x = Y_A l / 2 = 2,65 \cdot 0,1 / 2 \cdot 1000 = 132,5 \text{ Нм.}$$

Эпюра M_x на рис. 7.14, в.

Плоскость xOz (рис. 7.14, з). Опорные реакции

$$X_A = X_B = Fr / 2 = 1,9 / 2 = 0,95 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент в сечении вала под колесом

$$M_y = X_A l / 2 = 0,95 \cdot 0,1 / 2 \cdot 1000 = 47,5 \text{ Нм.}$$

Эпюра M_y на рис. 7.14, д.

Сечение вала – круг, в котором любая ось, проходящая через центр тяжести сечения, является главной центральной осью. Поэтому, для упрощения расчета, находим суммарный изгибающий момент и расчет нормальных напряжений проводим в плоскости действия суммарного изгибающего момента (в силовой плоскости).

Суммарный изгибающий момент в сечении вала под колесом

$$M_{\text{сум}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{132,5^2 + 47,5^2} = 140,8 \text{ Нм.}$$

Эпюры суммарного изгибающего и крутящего моментов приведены на рис. 7.14, *e* и *ж*.

Угол наклона силовой плоскости к оси *y*

$$\varphi = \arctg \frac{F_r}{F_t} = \arctg \frac{1,9}{5,3} = 20^\circ.$$

Проводим ось *u* под углом φ к оси *y* (ось *u* лежит в силовой плоскости). Проводим ось *v* перпендикулярно оси *u* (так как осевые моменты $J_v = J_u$, то нулевая линия перпендикулярна силовой плоскости, т.е. ось *v* является нулевой линией).

Нормальные и касательные напряжения в сечении вала под колесом в наиболее удаленных от нулевой линии точках на расстоянии $d_g/2$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{сум}}}{W_v} = \frac{M_{\text{сум}}}{\pi d_g^3 / 32} = \frac{140,8}{\pi \cdot 0,03_g^3 / 32} \cdot 10^{-6} = 53,1 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{M_k}{\pi d_g^3 / 16} = \frac{220}{\pi \cdot 0,04_g^3 / 16} \cdot 10^{-6} = 41,5 \text{ МПа,}$$

где W_v ; W_p – осевой и полярный моменты сопротивления.

Эпюры напряжений в поперечном сечении вала под колесом приведены на рис. 7.14, *з*.

8 ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

8.1 Напряженное состояние в точке

Деформационно-напряженное состояние стержня определяется напряжениями, возникающими вследствие его нагружения. Для того, чтобы можно было судить о прочности тела, нагруженного произвольной системой силовых факторов, необходимо описать напряженное состояние в каждой его точке, т. е. определить совокупность напряжений, действующих в точке.

Для анализа напряженного состояния тела используют метод сечений. В стержне в окрестности некоторой исследуемой точки выделяют шестью плоскостями, параллельными координатным осям, бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда, на каждой грани (площадке) которого действуют полные напряжения (рис. 8.1). Размеры dx , dy , dz параллелепипеда выбирают такими, чтобы изменением напряжений внутри его можно

пренебречь, т.е. на параллельных площадках параллелепипеда действуют одинаковые напряжения.

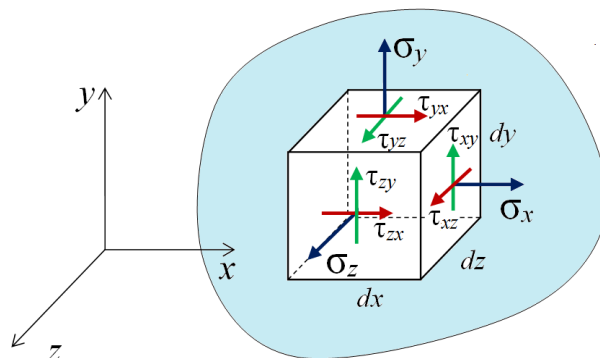


Рисунок 8.1 – Напряженное состояние в точке

Каждое из этих напряжений может быть разложено по координатным осям на три составляющих: нормальное и два касательных напряжения. Эти напряжения обозначают величинами с двумя индексами: первый индекс указывает ось, параллельную нормали к площадке, второй – ось, параллельную данной составляющей напряжения. Если оба индекса одинаковы, например, σ_{xx} , то второй индекс опускают - σ_x . Показанные на рис. 8.1 девять составляющих напряжений называют *компонентами напряженного состояния в данной точке*.

Равновесие выделенного элемента возможно при условии

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad . \quad (8.1)$$

Зависимость (8.1) называют *законом парности касательных напряжений*: составляющие касательных напряжений, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру этих площадок, равны по абсолютному значению.

С учетом (8.1) из девяти компонентов независимыми являются только шесть.

Относительно исследуемой точки можно построить бесчисленное множество различно ориентированных в пространстве малых элементов, на гранях возникают, в общем случае, различные составляющие напряжений. *Совокупность нормальных и касательных напряжений, возникающих на бесчисленном множестве различно ориентированных в пространстве площадок, которые можно провести через точку, характеризуют напряженное состояние в данной точке*.

Без доказательства укажем: *напряженное состояние в точке тела задано, если известны напряжения на любых трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку*.

Вращением площадки элемента объема можно расположить так, что к ним будут приложены только нормальные напряжения, а их касательные составляющие равны нулю. Такие площадки называют *главными площадками*, а действующие на них напряжения - *главными напряжениями*. Три главных напряжения полностью характеризуют напряженное состояние точки.

Главные напряжения обозначают σ_1 , σ_2 , σ_3 , при этом индексы расставляют, чтобы выполнялись алгебраические неравенства

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (8.2)$$

Если в окрестности какой-либо точки тела действуют три главных напряжения, то имеет место трехосное нагружение, а соответствующее напряженное состояние в этой точке называют *объемным* (рис. 8.2, а), если напряжения на одной из граней равны нулю, то напряженное состояние называют *плоским* (рис. 8.2, б), если только одно из главных напряжений отлично от нуля (при простых видах деформации например, растяжения или сжатия) - это *линейное* напряженное состояние (рис. 8.2, в).

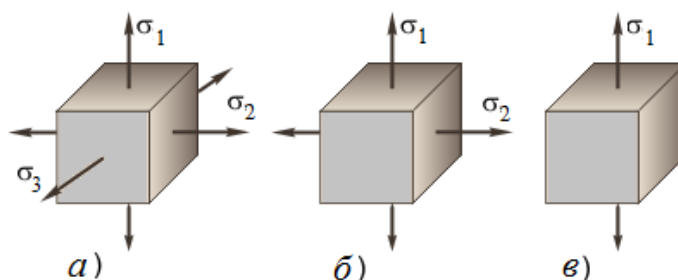


Рисунок 8.2 – Объемное (а), плоское (б), линейное (в) напряженное состояние

8.2 Определение главных напряжений

Выделим произвольно ориентированной плоскостью из элементарного параллелепипеда бесконечно малую четырехгранную пирамиду (тетраэдр), три грани которой (исходные площадки) совпадают с координатными плоскостями параллелепипеда (рис. 8.3).

Наклонная площадка имеет единичный вектор нормали с компонентами n_x , n_y , n_z .

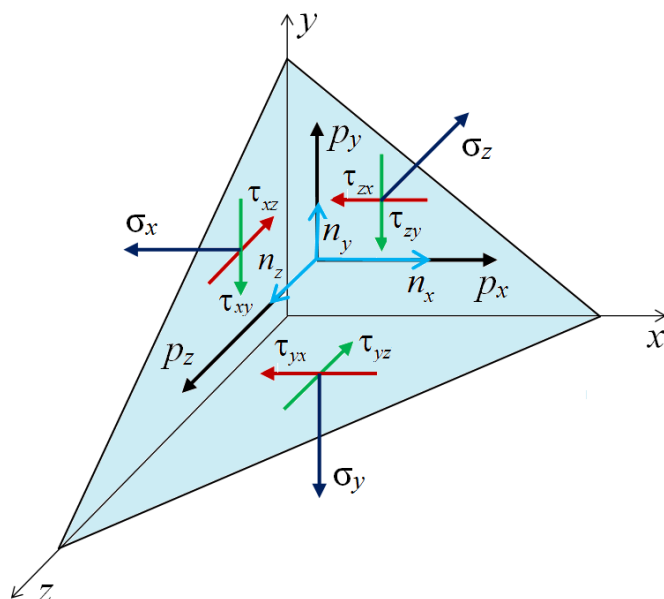


Рисунок 8.3 – Напряжения на гранях тетраэдра

На гранях тетраэдра действуют напряжения, показанные на рисунке 8.3. Вектор полного напряжения \vec{p} на наклонной площадке разложим на составляющие p_x, p_y, p_z вдоль координатных осей.

Площади граней, ортогональных координатным осям и вектору нормали

$$dA_x = dA_p n_x; \quad dA_y = dA_p n_y; \quad dA_z = dA_p n_z, \quad (8.3)$$

где dA_p - площадь наклонной грани.

Уравнения равновесия тетраэдра относительно осей x, y, z (суммы проекций сил, действующих на оси x, y, z)

$$\sum F_x = p_x dA_p - \sigma_x dA_x - \tau_{yx} dA_y - \tau_{zx} dA_z = 0;$$

$$\sum F_y = p_y dA_p - \sigma_y dA_y - \tau_{xy} dA_x - \tau_{zy} dA_z = 0;$$

$$\sum F_z = p_z dA_p - \sigma_z dA_z - \tau_{yz} dA_y - \tau_{xz} dA_x = 0.$$

С учетом (8.3) уравнения равновесия преобразуем к виду

$$p_x = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z;$$

$$p_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z; \quad (8.4)$$

$$p_z = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_z n_z.$$

Формулы (8.4) определяют вектор полного напряжения \vec{p} на произвольно выбранной площадке с вектором \vec{n} через компоненты напряжений.

Среди всех возможных направлений вектора нормали \vec{n} существуют такие направления, для которых вектор напряжений \vec{p} параллелен вектору \vec{n} . На соответствующих площадках действуют только нормальные напряжения, а касательные напряжения отсутствуют – такие площадки называются главными, а нормальные напряжения на этих площадках – главными напряжениями (см. п. 8.1).

Пусть площадка с единичным вектором нормали \vec{n} является главной. Условия коллинеарности векторов \vec{p} и \vec{n} есть условия пропорциональности их компонент

$$p_x = \sigma n_x; \quad p_y = \sigma n_y; \quad p_z = \sigma n_z. \quad (8.5)$$

Подставив значения компонент из (8.5) в (8.4), после несложных преобразований получим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных компонент n_x , n_y , n_z вектора нормали к главной площадке

$$(\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z = 0;$$

$$\tau_{xy}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{zy}n_z = 0; \quad (8.6)$$

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z = 0,$$

где σ – главное напряжение.

Решение системы $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_z = 0$ не удовлетворяет, так как для единичного вектора \vec{n} квадрат модуля равен 1, т. е.

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (8.7)$$

Система уравнений имеет ненулевое решение, если определитель, составленный из коэффициентов уравнений, обращается в нуль

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8)$$

Определитель составлен с учетом (8.1).

Раскрывая определитель, приходим к кубическому уравнению относительно главного напряжения, которое называется *характеристическим*

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \quad (8.9)$$

где $J_1; J_2; J_3$ – величины, которые называют инвариантами тензора напряжений;

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2; \quad (8.10)$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Решение уравнения (8.9) дает три значения главных напряжений σ_i , $i=1; 2; 3$, которые упорядочиваются в соответствии с (8.2).

Определение положения главных площадок. Каждому значению σ_i соответствует вектор \vec{n}_i , характеризующий положение i -й главной площадки с компонентами n_{ix} , n_{iy} , n_{iz} . Для их нахождения достаточно в уравнения (8.6) подставить значение σ_i и решить любые два из этих уравнений совместно с (8.7).

Выполнив такие решения для $i = 1; 2; 3$, получим матрицу направляющих косинусов, которая полностью определяет положение площадок

$$N = \begin{vmatrix} n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \\ n_{3x} & n_{3y} & n_{3z} \end{vmatrix}. \quad (8.11)$$

8.3 Определение напряжений на наклонных площадках

Пусть известны напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 на гранях элемента, совпадающего с главными площадками. Рассечем элемент произвольной наклонной плоскостью под углом α вектору σ_2 и параллельной вектору σ_3 (рис. 8.4).

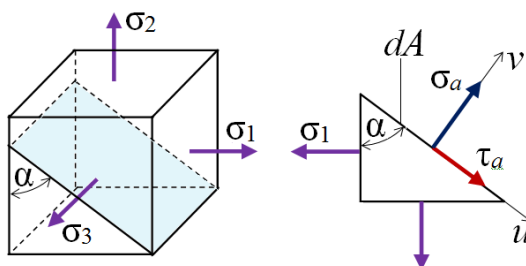


Рисунок 8.4 – Напряжения в наклонной площадке

Из условия равновесия трехгранной призмы имеем

$$\sum F_v = \sigma_a dA - (\sigma_1 dA \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_2 dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0,$$

откуда нормальные напряжения на наклонной площадке

$$\sigma_a = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad \sigma_a = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

или

$$\sigma_a = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2 + [(\sigma_1 - \sigma_2) / 2] \cos 2\alpha; \quad (8.12)$$

$$\sum F_u = \tau_a dA - (\sigma_1 dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_2 dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0,$$

откуда касательные напряжения на наклонной площадке

$$\tau_a = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \sin \alpha,$$

или

$$\tau_a = [(\sigma_1 - \sigma_2) / 2] \sin 2\alpha. \quad (8.13)$$

Здесь обозначено: $\sum F_v$; $\sum F_u$ - суммы сил на оси v и u ; dA - площадь наклонной площадки.

Из (8.12) следует, что наибольшее нормальное напряжение на наклонной площадке будет при $\alpha = 0^\circ$ $\sigma_a = \sigma_1$, наименьшее - при $\alpha = 90^\circ$ $\sigma_a = \sigma_2$.

Из (8.13) следует:

- наибольшее касательное напряжение будет при $\alpha = 45^\circ$
 $\tau_a = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2$, наименьшее - при $\alpha = 0^\circ$ $\tau_a = 0$;

- при $\sigma_1 = \sigma_2$ ни на одной площадке не возникает касательных напряжений, т. е. все площадки главные;

- при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ любая площадка, проходящая через данную точку, является главной.

8.4 Теория предельных напряженных состояний

Предельным напряжением для пластичного материала является предел текучести, а для хрупкого - предел прочности. Поэтому предельное напряженное состояние у пластичных материалов наступает при возникновении остаточных деформаций, а у хрупких - при начале разрушения.

Возникновение текучести или признаков хрупкого разрушения хотя бы в одной точке конструкции (стержня) рассматривается как нарушение прочности конструкции в целом.

Вывод о прочности конструкции делают из сопоставления максимальных напряжений, которые могут возникнуть в наиболее опасной точке, и предельно допустимых для данного материала. При линейном напряженном состоянии (например, одноосном растяжении) для этого достаточно сравнить главное напряжение с предельным, которое определяется при испытаниях материала (см. формулы 2.5, 2.20, 2.21).

Для плоского и объемного напряженных состояний сопоставление главных и предельных напряжений затруднительно, так как число вариантов напряженных состояний бесчисленное множество и провести для всех их испытания материалов невозможно.

Напряженные состояния называются *подобными*, для которых отношения главных напряжений одинаковы, т.е.

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \sigma'_1 : \sigma'_2 : \sigma'_3.$$

При некоторых значениях главных напряжений ($\sigma_{1пр}$; $\sigma_{2пр}$; $\sigma_{3пр}$) напряженное состояние в некоторой точке становится предельным (достигается напряжение предела прочности для хрупких материалов или предела текучести – для пластичных).

Коэффициент запаса прочности (величина, показывающая, во сколько раз нужно увеличить главные напряжения в точке, чтобы ее состояние стало предельным)

$$s = \sigma_{1пр} / \sigma_1 = \sigma_{2пр} / \sigma_2 = \sigma_{3пр} / \sigma_3. \quad (8.14)$$

Принимают, что два напряженных состояния являются *равноопасными* или *эквивалентными*, если их коэффициенты запаса прочности одинаковы. С учетом этого в расчете на прочность сложное напряженное состояние заменяют эквивалентным (равноопасным) одноосным состоянием и сравнивают эквивалентное напряжение с предельным или допускаемым для данного материала. За эквивалентное одноосное состояние принимают наиболее изученное напряженное состояние при простом растяжении (сжатии).

Под эквивалентным напряжением $\sigma_{экр}$ понимают напряжение при одноосном растяжении, равноопасное заданному сложному напряженному состоянию.

Схема расчета на прочность при сложном напряженном состоянии приведена на рис. 8.5.

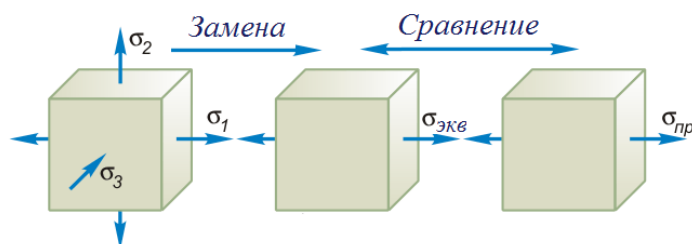


Рисунок 8.5 – Схема расчета при сложном напряженном состоянии

Определение эквивалентного напряжения по заданным главным напряжениям выполняется на основании различных гипотез прочности.

8.5 Гипотезы прочности

Универсального критерия, предопределяющего предельное напряженное состояние для любого материала, нет. Разработка критериев предельных напряженных состояний основывается на различных гипотезах о преимущественном влиянии того или иного фактора на прочность материала.

Первая гипотеза прочности была выдвинута Галилеем в XVII в. и состоит в том, что причиной разрушения материала является наибольшее нормальное напряжение σ_p растяжения или σ_c сжатия без учета двух других главных напряжений. Экспериментальная проверка не подтвердила этой гипотезы в отношении двухосного и трехосного напряженных состояний.

Вторая гипотеза была выдвинута в 1682 г. Э. Мариоттом; согласно этой гипотезе, прочность материала в исследуемой точке достигает критического состояния при максимальном значении линейной деформации ε . Экспериментальная проверка и в этой гипотезе обнаружила ряд весьма существенных недостатков.

Третья гипотеза, предложенная Кулоном в 1773 г., предполагает, что предельное напряженное состояние возникает в момент, когда в двух взаимно перпендикулярных сечениях, проведенных через исследуемую точку, наибольшие касательные напряжения достигают предельного значения, при котором возможно разрушение путем сдвига и скольжения одной части материала по другой. Эта гипотеза применима для пластичных материалов, т. е. при условии, что пределы прочности материала при растяжении и сжатии равны $\sigma_{вр} = \sigma_{вс}$ и для напряженных состояний, у которых σ_1 и σ_3 имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Согласно гипотезе эквивалентные напряжения равны

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (8.15)$$

Четвертая гипотеза, предложенная О. Мором в 1900 г., базируется на двух факторах σ и τ . Экспериментальная проверка показала, что полученный на основе гипотезы критерий перехода от исследуемого напряженного состояния к эквивалентному применим для пластичных и для хрупких материалов, если σ_1 и σ_3 имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Согласно критерию эквивалентные напряжения равны

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \nu \sigma_3, \quad (8.16)$$

где для хрупких материалов $\nu = \sigma_{вр} / \sigma_{вс}$; для пластичных материалов $\nu = \sigma_{тп} / \sigma_{тс}$.

В частном случае, когда пределы текучести материала при растяжении и сжатии одинаковы $\nu = \sigma_{вр} / \sigma_{вс} = 1$, формула (8.16) приводится к формуле (8.15).

Пятая гипотеза прочности называется гипотезой энергии формоизменения. Критерий перехода от исследуемого напряженного состояния к эквивалентному состоянию основан на том, что предельное напряженное состояние возникает при некотором значении потенциальной энергии, накапливаемой элементом конструкции при изменении только его формы. Согласно гипотезе эквивалентные напряжения равны

$$\sigma_{экр} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (8.17)$$

Экспериментальная проверка пятой гипотезы показала, что она справедлива только для пластичных материалов, у которых пределы текучести на растяжение и сжатие одинаковы $\sigma_{тп} = \sigma_{тс}$.

В настоящее время из пяти гипотез прочности используются последние три.

8.6 Проверка прочности при изгибе с кручением

При сложном сопротивлении изгиба с кручением в расчетах на прочность учитывают только три момента: два изгибающих и крутящий (см. п. 7.4). От них в сечении стержня возникают нормальное и касательное напряжения, которые определяют формулам (7.16) и (7.17). Наибольшие нормальные напряжения действуют в наиболее удаленных точках от центральных главных осей, а касательные – от центра тяжести сечения.

Внутренние силовые факторы в произвольном сечении стержня и напряжения, действующие по граням выделенного элемента B , показаны на рис. 8.6.

Из рисунка следует, что в произвольном сечении возникает плоское напряженное состояние

$$\sigma = \sigma_z = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x; \quad \sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 0;$$

$$\tau = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{M_{kp}}{J_p} r; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0.$$

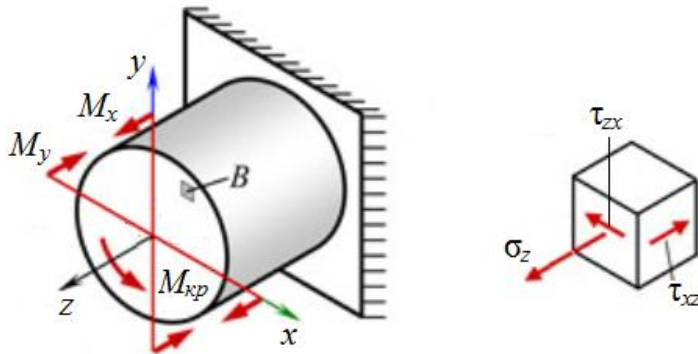


Рисунок 8.6 – Внутренние силовые факторы в сечении и напряжения на гранях элемента B

Определим главные напряжения по (8.9). Инварианты напряжений по формулам (8.10)

$$J_1 = \sigma_z; \quad J_2 = -\tau_{zx}^2; \quad J_3 = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\sigma^3 - \sigma_z \sigma^2 - \tau_{zx}^2 \sigma = 0,$$

или

$$\sigma(\sigma^2 - \sigma_z \sigma - \tau_{zx}^2) = 0.$$

Корни уравнения

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}. \quad (8.18)$$

Эквивалентные напряжения по III теории прочности (наибольших касательных напряжений) по формуле (8.16)

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \left[\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} \right] - \left[-\frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} \right] = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Условие прочности по III теории прочности

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p]. \quad (8.19)$$

Подставив значения главных напряжений из (8.18) в (8.17), после преобразований получим условие прочности для пластичных материалов по V теории прочности (энергии формоизменения)

$$\sigma_{\text{эквV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma_p]. \quad (8.20)$$

В условия прочности (8.19) и (8.20) подставляются максимальные нормальные напряжения σ от изгиба и касательные напряжения τ от кручения. Главные напряжения σ_1 и σ_3 не вычисляют.

Пример 8.1. По данным примера 7.4 проверить прочность сечения вала под зубчатым колесом. Допускаемое напряжение материала вала $[\sigma_p] = 100$ МПа.

Решение. Под действием внешней нагрузки в сечении возникает плоское напряженное состояние. Проверку проводим по III теории прочности.

Максимальные нормальные напряжения от изгиба $\sigma = 53,1$ МПа, касательные напряжения от кручения $\tau = 41,5$ МПа (см. пример 7.4).

Условие прочности по III теории прочности

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{53,1^2 + 41,5^2} = 67 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 100 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполнено.

9 ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Большинство деталей машин испытывают переменные напряжения, циклически изменяющиеся во времени. В некоторых случаях их доля в общей нагрузке невелика и при расчетах на прочность не учитывается. В других случаях пренебрежение переменной составляющей нагрузки или ее неправильный учет приводит к авариям и разрушениям. Анализ случаев поломок машин свидетельствует о том, что большинство поломок (до 80–90%) происходит вследствие усталости металлов. Этот вид разрушения металлов наблюдается при повторном и повторно-переменном действии нагрузки.

9.1 Усталость материалов

Усталость материала – процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению. Усталостное разрушение деталей наступает при напряжениях, значительно меньших предельных значений.

Физические причины усталостного разрушения материалов сложны и до не конца изучены. Одной из основных причин усталостного разрушения принято считать образование и развитие трещин.

Усталостное разрушение связано с неоднородностью структуры материалов (различие размеров, формы, ориентации соседних зёрен металла, наличие разных включений — шлаков, примесей; дефекты кристаллической решётки, дефекты поверхности материала — царапины, коррозия и т. д.). При переменных нагрузках на границах отдельных включений и поблизости от микроскопических полостей и разных дефектов возникает концентрация напряжений, которая приводит к микропластичным деформациям сдвига некоторых зёрен металла и накопления сдвигов. Далее происходит развитие сдвигов в микротрещине, их сращивание, на последнем этапе появляется одна или несколько макротрещин, которая достаточно интенсивно развивается (разрастается). Края трещины под действием переменной нагрузки притираются друг к другу, и поэтому зона роста трещины отличается гладкой (полированной) поверхностью. По мере разрастания трещины поперечное сечение детали всё более ослабляется, и, наконец, происходит случайное хрупкое разрушение детали, при этом зона хрупкого излома имеет грубозернистую кристаллическую структуру (как при хрупком разрушении).

Излом от усталости имеет характерный вид (рис. 9.1). Поперечное сечение излома имеет две зоны:

- гладкая, притертая зона - образованная вследствие постепенного развития трещины; кристаллы не различаются невооруженным глазом, поверхность сглажена;

- крупнозернистая зона, образовавшаяся при окончательном изломе сечения детали, ослабленной развивающейся трещиной; явно выступают признаки хрупкого разрушения, кристаллы имеют острую огранку и блестящую поверхность.

Разрушенная деталь не имеет значительных остаточных пластических деформаций, которые характерны при разрушении постоянной нагрузкой.

Усталостному разрушению подвержены многие детали машин и элементы конструкций: оси вагонов, шатуны двигателей, гребные винты, крепежные болты и др.



Рис. 9.1 – Разрушение шатуна: темная зона – усталостное разрушение, светлая – хрупкий излом

Выносливость – способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений от заданной нагрузки без разрушения.

9.2 Циклы напряжений

Обычно напряжение в элементах механических систем изменяется по периодическим или близким к ним законам. Законы изменения во времени t переменных напряжений σ определяются кинематикой механизма и взаимодействием движущихся систем. Совокупность последовательных значений напряжений за один период T их изменения называют циклом напряжений или циклом.

Параметры цикла напряжений приведены на рис. 9.2, а):

σ_{\max} ; σ_{\min} – максимальное и минимальное напряжения цикла;

$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$ – среднее напряжение;

$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$ – амплитуда напряжений цикла;

$R_\sigma = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ – коэффициент асимметрии цикла напряжений.

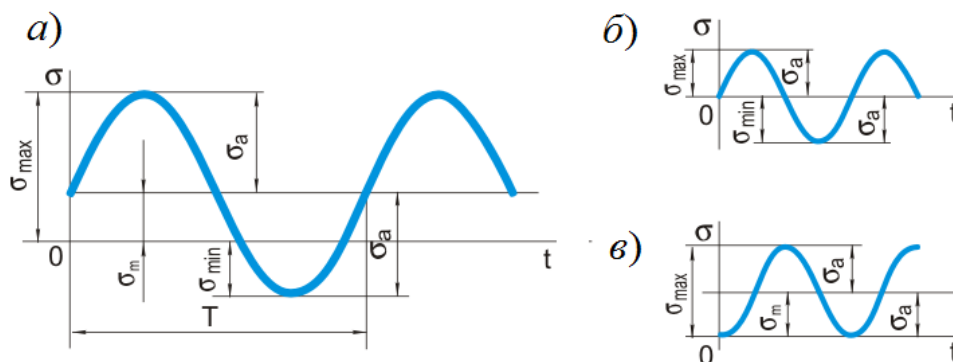


Рисунок 9.2 - Параметры цикла напряжений

Число комбинаций параметров цикла бесконечно. Испытания на выносливость проводят для симметричного и отнулевого циклов, результаты которых используют в расчетах на выносливость и для других циклов.

Симметричный цикл напряжений – цикл, у которого максимальное и минимальное напряжения равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку; коэффициент асимметрии цикла $R_\sigma = -1$ (рис. 9.2, б). Отнулевой цикл напряжений – знакопостоянный цикл напряжений, изменяющихся от нуля до максимума; коэффициент асимметрии цикла $R_\sigma = 0$ (рис. 9.2, в).

В случае переменных касательных напряжений здесь и далее остаются в силе все приведенные выше термины и соотношения с заменой σ на τ .

9.3 Предел выносливости

Наибольшее напряжение, при котором материал, не разрушаясь, выдерживает определенное число циклов, устанавливают опытным путем *при испытаниях на выносливость*.

На рис. 9.3 показана схема машины для испытания образцов при чистом изгибе при симметричном цикле напряжений ($R_\sigma = -1$). Образец 3 зажат во вращающихся цангах 2 и 4. Усилие передается от груза, подвешенного на серьгах 1 и 5. Счетчик 6 фиксирует число N циклов нагружений образца. При разрушении образца двигатель 7 автоматически отключается. Задавая образцам различные значения напряжений цикла, определяют число циклов N , необходимое для разрушения образца. Из-за разброса в предельных значениях N испытаниям подвергают несколько образцов при одном и том же значении напряжения цикла. Полученные значения числа циклов N усредняют.

При необходимости испытания могут быть проведены и при другом коэффициенте асимметрии цикла R_σ .

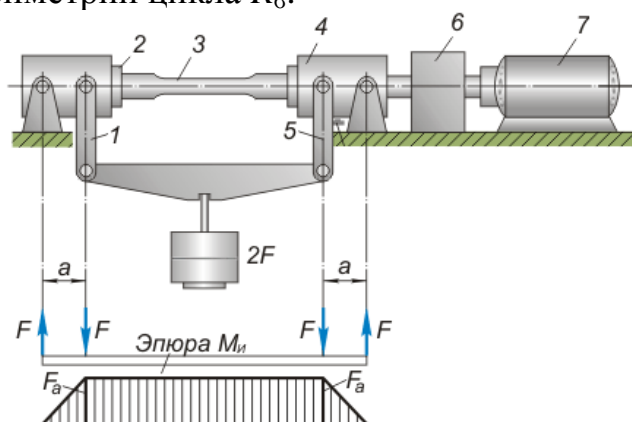


Рисунок 9.3 - Испытание при чистом изгибе при симметричном цикле

По полученным данным в координатах, σ_{\max} - N строят кривую, называемую *кривой усталости* (рис. 9.4).

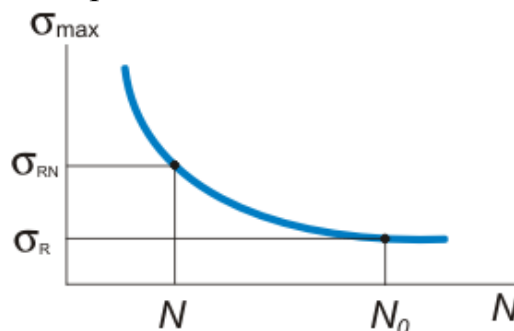


Рисунок 9.4 – Кривая усталости при цикле с коэффициентом асимметрии R

С увеличением N уменьшается абсолютное значение σ_{\max} , кривая усталости имеет горизонтальную асимптоту. Число циклов N_0 , при котором кривая усталости становится горизонтальной прямой, называется *базой испытаний*. Для разных материалов приняты различные базы испытаний; так, для стальных образцов $N_0 = 10^7$, для цветных металлов и сталей высокой твердости $N_0 = 10^8$ и т. д.

Наибольшее напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостного разрушения до базы испытания N_0 , называется *пределом выносливости* и обозначается σ_R (в обозначении R – число, равное коэффициенту асимметрии цикла R_σ). Так для симметричного цикла с $R_\sigma = -1$ предел выносливости обозначают σ_{-1} , отнулевого цикла с $R_\sigma = 0$ – σ_0 и т. д.

Кривая усталости достаточно точно аппроксимируют гиперболой

$$\sigma_{RN}^p N = const = \sigma_R^p N_0. \quad (9.1)$$

При расчете деталей, у которых за срок службы число циклов нагружений $N < N_0$, вводят понятие *предела ограниченной выносливости* σ_{RN} , где под σ_{RN} понимают максимальное напряжение цикла с коэффициентом асимметрии R , при котором число циклов нагружения до разрушения образца (детали) составляет N .

Значение предела ограниченной выносливости можно найти из уравнения гиперболы

$$\sigma_{RN} = \sigma_R \sqrt[p]{N_0 / N} = \sigma_R K_d, \quad (9.2)$$

где K_d - коэффициент договечности;

$$K_d = \sqrt[p]{N_0 / N}. \quad (9.3)$$

Апроксимация кривой усталости гиперболой имеет большую погрешность при малых значениях числа циклов нагружения N и при $N > N_0$. Поэтому максимальное и минимальное значения коэффициента долговечности ограничивают

$$K_{d\min} \leq K_d \leq 1.$$

Значения величин $\sigma_R, N_0, p, K_{d\min}$ для различных материалов приводятся в справочниках.

9.4 Факторы, влияющие на предел выносливости

Кроме числа циклов нагружений и коэффициента асимметрии на усталостную прочность влияют ряд факторов, из которых особо выделяют следующие: 1) концентрация напряжений; 2) абсолютные размеры детали (масштабный фактор); 3) качество обработки поверхности и состояние поверхностного слоя; 4) состояние макро- и микроструктуры изделия; 5) состояние внешней среды: температура, облучение, агрессивность; 6) технологические методы упрочнения.

В местах изменения формы деталей (у отверстий, надрезов, шпоночных пазов, в резьбе и т. д.), в зоне сопряжений с натягом возникает местное повышение напряжений. Явление возникновения местных напряжений называют *концентрацией напряжений*, а причины, ее вызывающие (отверстия, надрезы, запрессовка), - *концентраторами напряжений*. На рис. 9.5 показано распределение напряжений в поперечном сечении, проходящем через отверстие в растянутой полосе. Наибольшие напряжения возникают у краев отверстия.

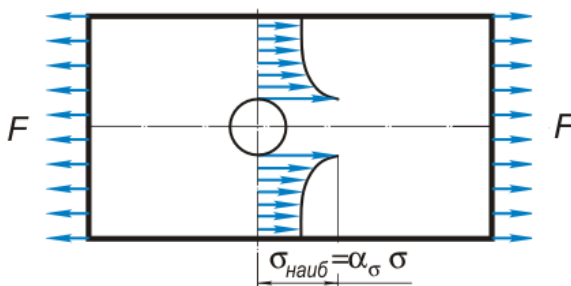


Рисунок 9.5 – Распределение напряжений в сечении, ослабленном отверстием

Степень влияния местных напряжений на прочность детали существенно зависит от характера нагружения и материала. При расчете конструкции из пластичных материалов, работающей в условиях статического нагружения, местными напряжениями пренебрегают, так как при росте нагрузки напряжения в зоне концентрации, достигнув предела текучести, не возрастают до тех пор, пока во всех соседних точках они не достигнут того же значения, т. е. распределение напряжений станет равномерным. При

циклически изменяющихся нагрузках многократное изменение напряжений в зоне концентратора напряжений приводит к образованию и развитию трещины с последующим усталостным разрушением детали (причем вероятность возникновения и скорость роста трещины в зоне концентратора больше из-за действия больших напряжений).

Для оценки снижения прочности концентраторами напряжений вводят *эффективный коэффициент концентрации*, равный отношению предела выносливости σ_{-1} гладкого полированного образца к пределу выносливости образца σ_{-1K} с концентратором напряжений с абсолютными размерами гладкого образца

$$K_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1K}. \quad (9.4)$$

Здесь и далее, если не оговорено особо, для определенности рассматривается симметричный цикл нагружения.

Экспериментально установлено, что с увеличением абсолютных размеров поперечных сечений деталей происходит снижение предела выносливости из-за увеличения вероятности возникновения усталостных трещин, так как в большем объеме находится большее число источников возникновения трещин. Это снижение учитывается *коэффициентом влияния абсолютных размеров сечения*, равного отношению предела выносливости σ_{-1} стандартного образца к пределу выносливости образца σ_{-1d} заданного диаметра d

$$K_d = \sigma_{-1} / \sigma_{-1d}. \quad (9.5)$$

Шероховатость (микронеровности) поверхности являются концентраторами напряжений и способствуют развитию усталостных трещин в поверхностном слое. Это учитывается *коэффициентом влияния шероховатости поверхности*, равного отношению предела выносливости σ_{-1} гладкого полированного образца к пределу выносливости образца σ_{-1F} с заданной шероховатостью

$$K_F = \sigma_{-1} / \sigma_{-1F}. \quad (9.6)$$

Повышение прочности поверхностного слоя поверхностной закалкой, химико-термической обработкой, наклепом и учитывается *коэффициентом влияния поверхностного упрочнения*, равного отношению предела выносливости σ_{-1y} образца, подвергнутого упрочнению, к пределу выносливости σ_{-1} стандартного образца

$$K_V = \sigma_{-1y} / \sigma_{-1}. \quad (9.7)$$

Общий коэффициент снижения предела выносливости детали

$$K_{\sigma D} = (K_{\sigma} / K_d + K_F - 1) / K_V. \quad (9.8)$$

Если в одном и том же сечении имеют место различные концентраторы напряжений, то расчет выполняют по максимальным значениям.

9.5 Диаграмма предельных амплитуд

Для характеристики выносливости материала необходимо установить зависимость предела выносливости от коэффициента асимметрии цикла нагружений.

С этой целью из исследуемого материала изготавливают несколько серий одинаковых образцов и каждую серию подвергают испытаниям на выносливость при разных значениях коэффициента асимметрии цикла, например, $R_{\sigma} = -1; 0; 0,5$ и т.д. При этом фиксируют значение среднего напряжения цикла σ_m , предельную амплитуду σ_a , соответствующую базе испытаний N_0 , и предел выносливости цикла

$$\sigma_R = \sigma_m + \sigma_a. \quad (9.9)$$

По значениям σ_m и σ_a строят зависимость предельных амплитуд от средних напряжений цикла, называемую *диаграммой предельных амплитуд* (рис. 9.6).

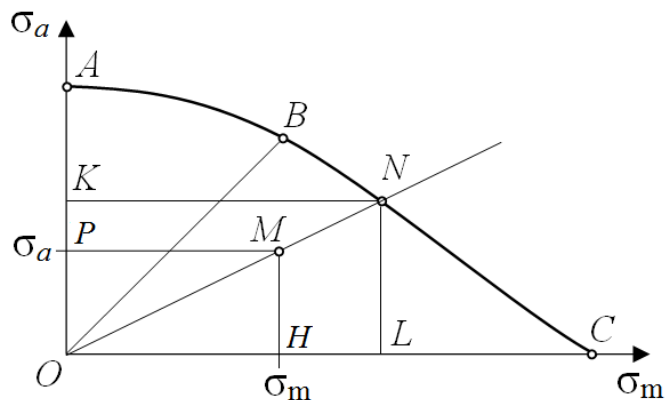


Рисунок 9.6 – Диаграмма предельных амплитуд

Каждая точка кривой ABC диаграммы характеризует цикл. Так точка A соответствует пределу выносливости при симметричном цикле с параметрами $\sigma_m = 0; \sigma_{\max} = \sigma_a; R_{\sigma} = -1$; B - пределу выносливости при отнулевом цикле точка с параметрами $\sigma_m = \sigma_a = \sigma_{\max} / 2; \sigma_{\min} = 0; R_{\sigma} = 0$; точка C - пределу прочности при статическом напряжении. Область диаграммы, ог-

раниченная кривой ABC и осями координат, определяет зону безопасных циклов нагружений.

По экспериментальной диаграмме предельных амплитуд можно графоаналитическим методом определить коэффициент безопасности для детали из данного материала.

Пусть точка M характеризует рабочий цикл нагружения детали с параметрами

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a; \quad \sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad R_\sigma = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}.$$

Проведем из начала координат луч через точку M . Все точки, лежащие на луче, определяют подобные циклы (т.е. циклы с одинаковым коэффициентом асимметрии R_σ).

Цикл, изображаемый точкой N , - предельный; максимальное напряжение этого цикла, определяемое как сумма абсциссы и ординаты точки N , равно пределу выносливости σ_R . Максимальное напряжение цикла σ_{\max} , изображаемого точкой M , равно сумме абсциссы и ординаты точки M .

Из подобия рабочего и предельного циклов коэффициент безопасности (запаса прочности) по нормальным напряжениям, равный отношению максимальных нормальных напряжений предельного и рабочего циклов, будет

$$S_\sigma = \sigma_R / \sigma_{\max} = (NK + NL) / (MP + MH) = ON / OM = AO / AK = LO / HO, \quad (9.10)$$

где NK ; NL ; MP ; MH ; ON ; OM ; AO ; AK ; LO ; HO – отрезки; измеряются по диаграмме.

Построение диаграммы предельных амплитуд является трудоемким, поэтому для расчета ее схематизируют, приближенно заменяя кривую диаграммы двумя прямыми (рис.9.7).

Левую часть диаграммы заменяют прямой, проходящей через точки A (с координатами $\sigma_m = 0$ и $\sigma_a = \sigma_{-1}$) и точку B (с координатами $\sigma_m = 0,5\sigma_0$ и $\sigma_a = 0,5\sigma_0$), соответствующие пределам выносливости при симметричном и отнулевом циклах. Для пластичных материалов опасными являются напряжения, превышающие предел текучести σ_T . Поэтому правую часть диаграммы ограничивают прямой, проходящей через точку с координатами $\sigma_m = \sigma_T$ и $\sigma_a = 0$ под углом 45° к оси σ_m .

Пусть на схематизированной диаграмме точка M характеризует рабочий цикл нагружения детали с параметрами σ_m и σ_a .

Цикл, изображаемый точкой N , - предельный с параметрами $\sigma_{мп}$ и $\sigma_{ап}$.

Коэффициент безопасности по нормальным напряжениям (см. 9.10)

$$S_\sigma = \sigma_R / \sigma_{\max} = (\sigma_{мп} + \sigma_{ап}) / (\sigma_m + \sigma_a) = \sigma_{мп} / \sigma_m.$$

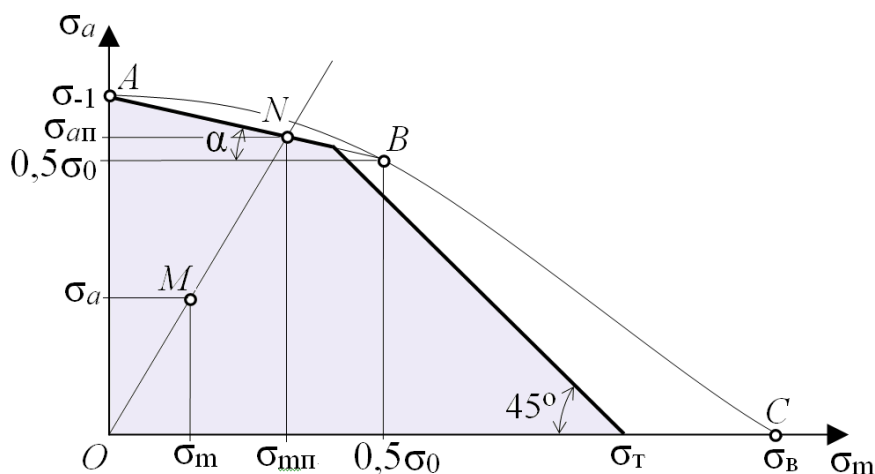


Рисунок 9.7 – Схематизированная диаграмма предельных амплитуд

Тангенс угла α (см. рис. 9.7)

$$\operatorname{tg} \alpha = \psi_{\sigma} = (\sigma_{-1} - 0,5\sigma_0) / 0,5\sigma_0.$$

Амплитуда предельного цикла

$$\sigma_{ап} = \sigma_{-1} - \sigma_{мп} \psi_{\sigma},$$

где ψ_{σ} – коэффициент, учитывающий влияние средних напряжений цикла на предел выносливости.

Из подобия рабочего и предельного циклов

$$\sigma_{мп} / \sigma_m = \sigma_{ап} / \sigma_a = (\sigma_{-1} - \sigma_{мп} \psi_{\sigma}) / \sigma_a;$$

или

$$\sigma_{мп} \sigma_a = \sigma_{-1} \sigma_m - \sigma_{мп} \sigma_m \psi_{\sigma}.$$

Откуда коэффициент безопасности по нормальным напряжениям

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{mi}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}. \quad (9.11)$$

При определении коэффициента безопасности для конкретной детали необходимо учесть влияние коэффициента снижения предела выносливости. Экспериментальные исследования показывают, что концентрация напряжений, масштабный эффект и состояние поверхности отражаются только на величинах предельных амплитуд и практически не влияют на величины предельных средних напряжений. Поэтому принято коэффициент снижения предела выносливости относить только к амплитудному напряжению цикла.

Тогда окончательные формулы для определения коэффициентов безопасности по нормальным и касательным напряжениям и условия прочности по усталостным разрушениям будут

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} \geq [S_{\sigma}]; \quad (9.12)$$

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m} \geq [S_{\tau}]. \quad (9.13)$$

При одновременном действии нормальных и касательных напряжений общий коэффициент безопасности

$$S = \frac{S_{\sigma} S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} \geq [S]. \quad (9.14)$$

Нормативные коэффициенты безопасности (запаса прочности) $[S]$, $[S_{\sigma}]$, $[S_{\tau}]$ зависят от достоверной точности определения усилий и напряжений, однородности материала, культуры производства и технологии изготовления детали. В зависимости от перечисленных факторов принимают

$$[S] = 1,3 \dots 3.$$

Пример 9.1. По данным примера 7.4 определить коэффициенты безопасности для сечения вала под зубчатым колесом. Принять:

- материал вала сталь 45 с термообработкой – цементация; пределы выносливости по нормальным и касательным напряжениям $\sigma_{-1} = 335$ МПа и $\tau_{-1} = 195$ МПа;

- цикл нагружен по нормальным напряжениям – симметричный, по касательным – отнулевой;

- коэффициенты снижения предела выносливости: эффективные коэффициенты концентрации $K_{\sigma} = 2$; $K_{\tau} = 1,9$ (концентратор – шпоночный паз); коэффициент влияния абсолютных размеров сечения $K_d = 0,87$ (диаметр вала $d_b = 30$ мм); шероховатости поверхности $K_F = 0,9$ (тонкое точение); коэффициент влияния поверхностного упрочнения $K_V = 1,4$ (цементация);

- коэффициенты влияния среднего напряжения на предел выносливости для стали 45: $\psi_{\sigma} = 0,05$; $\psi_{\tau} = 0,0$.

Решение. Параметры симметричного цикла нормальных напряжений (см. пример 7.4)

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_{\max} = 53,1 \text{ МПа.}$$

Общий коэффициент снижения предела выносливости вала по нормальным напряжениям

$$K_{\sigma D} = (K_{\sigma} / K_d + K_F - 1) / K_V = (2,0 / 0,87 + 0,9 - 1) / 1,4 = 1,6.$$

Коэффициент безопасности по нормальным напряжениям

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{335}{1,6 \cdot 53,1 + 0 \cdot 0} = 3,9 \geq [S_{\sigma}] = 2 \dots 3.$$

Параметры отнулевого цикла касательных напряжений (см. пример 7.4)

$$\tau_m = \tau_a = \tau_{\max} / 2 = 45,1 / 2 = 22,6 \text{ МПа.}$$

Общий коэффициент снижения предела выносливости вала по касательным напряжениям

$$K_{\tau D} = (K_{\tau} / K_d + K_F - 1) / K_V = (1,9 / 0,87 + 0,9 - 1) / 1,4 = 1,5.$$

Коэффициент безопасности по касательным напряжениям

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m} = \frac{195}{1,5 \cdot 22,6 + 0 \cdot 22,6} = 5,8 \geq [S_{\tau}] = 2 \dots 3.$$

Общий коэффициент безопасности

$$S = \frac{S_{\sigma} S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} = \frac{3,9 \cdot 5,8}{\sqrt{3,9^2 + 5,8^2}} = 3,1 \geq [S] = 2 \dots 3.$$

10 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Под устойчивостью понимается свойство элементов конструкции сохранять свое первоначальное положение равновесия при действии внешней нагрузки. Если элемент таким свойством не обладает, он и его состояние называются неустойчивыми.

При потере устойчивости происходит переход элемента к новому положению равновесия, сопровождающийся большими перемещениями и деформациями или разрушением.

10.1 Критическая сила сжатого стержня

Наиболее простым случаем является потеря устойчивости центрально сжатого стержня (рис. 10.1, а). При достаточно большой силе стержень не может сохранить прямолинейную форму и изгибается (рис. 10.1, б).

Значение силы, при котором первоначальная форма равновесия элемента становится неустойчивой, называется *критической силой* и обозначается $F_{кр}$.

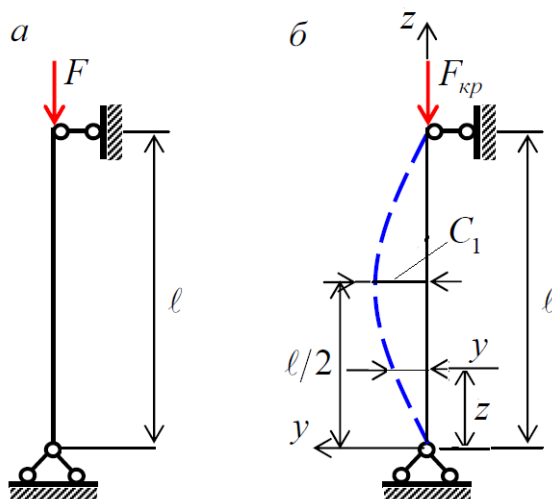


Рисунок 10.1 - Потеря устойчивости сжатого стержня

Потерю устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально сжатого прямого стержня называют *продольным изгибом*, так как изгиб вызывается действием продольной силы.

Определим $F_{кр}$ для прямого стержня постоянного сечения с шарнирно закрепленными концами, нагруженный центрально приложенной сжимающей силой F (см. рис. 10.1, а).

Для определения $F_{кр}$ рассмотрим равновесие стержня в положении, показанном на рис. 10.1, б пунктиром, и установим наименьшее значение силы $F = F_{кр}$, при котором возможно равновесие стержня с изогнутой осью.

Изгиб стержня происходит в плоскости минимальной жесткости с минимальным моментом инерции сечения. Для определенности примем, что изгиб происходит в плоскости $уoz$. Тогда в системе координат на рис. 10.1 координаты точек упругой линии стержня будут z , прогибы - y , момент инерции сечения - $J_x = J_{min}$.

При малых прогибах (при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности), приближенное дифференциальное уравнение упругой линии стержня

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_{min}},$$

где M_x - изгибающий момент в сечении с абсциссой z ;

$$M_x = -F_{кр} y.$$

Подставим выражение M_x в уравнение упругой линии

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{F_{кр} y}{EJ_{min}}.$$

Или
$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = 0,$$

где
$$k^2 = \frac{F_{кр} y}{EJ_{\min}}. \quad (10.1)$$

Интеграл дифференциального уравнения

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz.$$

Это решение имеет 3 неизвестных: постоянные интегрирования C_1 и C_2 и значение k , так как величина критической силы неизвестна.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из граничных условий: при $z = 0$ $y = 0$ и при $z = l$ и $y = 0$.

Из первого условия следует $C_2 = 0$.

Изогнутая ось стержня является синусоидой

$$y = C_1 \sin kz.$$

Второе условие дает уравнение

$$C_1 \sin kl = 0,$$

которое имеет два решения: $C_1 = 0$ или $\sin kl = 0$.

При $C_1 = 0$ перемещения y обращаются тождественно в нуль, стержень имеет прямолинейную форму, что противоречит постановки задачи.

Уравнения $\sin kl = 0$ имеет бесконечный ряд решений:

$$kl = 0; \pi; 2\pi; 3\pi \dots n\pi,$$

где n – произвольное целое число.

Откуда
$$k = n\pi / l.$$

Подставив значение k в зависимость (10.1) после несложных преобразований получим

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} n^2. \quad (10.2)$$

Из (10.2) следует, что сжимающая сила, способная удержать искривленный стержень в равновесии, имеет целый ряд значений. Наименьшее ее значение, при котором возможен продольный изгиб, будет при $n = 1$. Тогда

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}. \quad (10.3)$$

Формула (10.3) впервые была получена Л. Эйлером в 1744 году, поэтому первую критическую силу $F_{кр}$ называют *эйлеровой* критической силой.

Значению этой критической силы соответствует изгиб стержня по синусоиде

$$y = C_1 \sin \frac{\pi}{l} z. \quad (10.4)$$

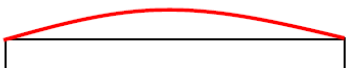
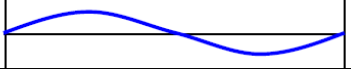
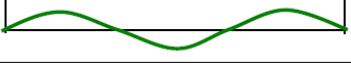
Максимальный прогиб посередине стержня при $z = l/2$

$$y_{\max} = C_1 \sin \frac{\pi l}{l 2} = C_1,$$

т.е. произвольная постоянная C_1 равна максимальному прогибу стержня.

Значениям критической силы при $n \geq 2$ соответствуют изгибы стержня по синусоидам с двумя, тремя и т.д. полуволнами (табл. 10.1).

Таблица 10.1 – Формы равновесия при $n \geq 2$

n	Форма равновесия	Критическая сила	Уравнение упругой линии
1		$F_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / l^2$	$y = C_1 \sin \pi z / l$
2		$F_{кр} = 4\pi^2 EJ_{\min} / l^2$	$y = C_1 \sin 2\pi z / l$
3		$F_{кр} = 9\pi^2 EJ_{\min} / l^2$	$y = C_1 \sin 3\pi z / l$

Формы равновесия при $n \geq 2$ неустойчивы и возможны при наличии промежуточных опор в сечениях с нулевым прогибом.

10.2 Влияние закрепления стержня на критическую силу

Закрепление сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами называют *основным* случаем закрепления.

Другие виды закрепления приводятся к основному случаю введением в формулу (10.3) коэффициента μ приведения длины

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (10.5)$$

где μ - коэффициент приведения длины; μl – приведенная длина стержня.

Коэффициент μ показывает, во сколько следует увеличить длину шарнирно-опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе стержня длиной l в рассматриваемых условиях закрепления.

Понятие о приведенной длине было введено профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. Ясинским.

На рис 10.2 показаны 4 случая закрепления стержня и указаны соответствующие значения коэффициента приведения длины.

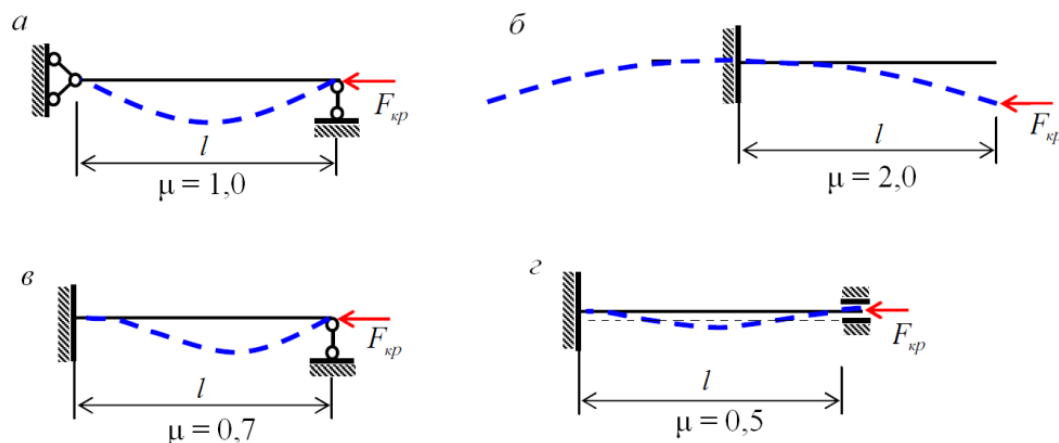


Рисунок 10.2 - Закрепление стержня и значения коэффициента приведения длины

В случаях б и г значение μ легко определяется путем сопоставления длины полуволны синусоиды упругой линии с длиной стержня.

На рис. 10.2, б полуволна синусоиды упругой линии дополнена (показано пунктиром) и ее длина равна 2 длинам стержня, а на рис. 10.2, г полуволна на синусоиде упругой линии ограничена пунктирной линией и длина полуволны равна половине длины стержня.

10.3 Критические напряжения сжатого стержня

Критическая сила $F_{кр}$ вызывает в сжатом стержне критические напряжения $\sigma_{кр}$, которые являются опасными для него

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}, \quad (10.6)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Допускаемые напряжения при расчете на устойчивость

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}, \quad (10.7)$$

где n_y – коэффициент запаса на устойчивость; для стали $n_y = 1,8 \dots 3$.

Условия устойчивости стержня

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y], \quad (10.8)$$

Или

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} \geq [n_y], \quad (10.9)$$

где $[n_y]$ – допускаемый коэффициент запаса на устойчивость.

В (10.9) площадь сечения подставляется без учета его ослаблений (например, заклепками или болтами). Это объясняется тем, что ослабление сечения стержня происходит не по всей его длине, а на отдельных небольших участках. Сопротивление же стержня продольному изгибу зависит от жесткости стержня на всей его длине и, поэтому, местные ослабления практически не влияют на величину критической силы.

Критические напряжения можно представить в следующем виде

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2 A},$$

или с учетом

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} \text{ и } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (10.10)$$

где i_{\min} – наименьший радиус инерции сечения; λ – гибкость сжатого стержня.

Безразмерная величина λ учитывает четыре характеристики сжатого стержня: длину стержня, величину площади сечения, способ закрепления его концов, форму сечения, зависящую от i_{\min} .

Зависимость $\sigma_{кр}$ от λ представляет собой гиперболическую кривую и называется «гиперболой Эйлера» (рис. 10.3).

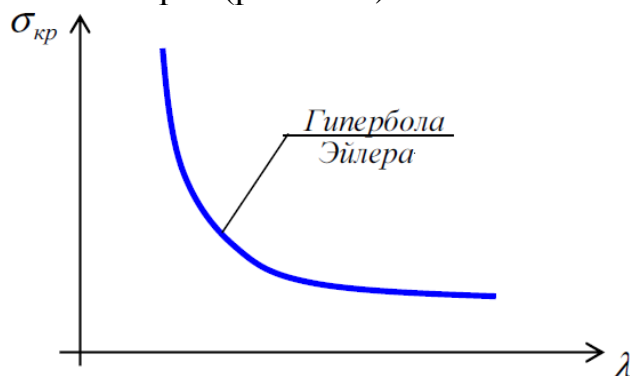


Рисунок 10.3 - Зависимость $\sigma_{кр}$ от λ

Пределы применимости формулы Эйлера. В основу вывода формулы критической силы положено приближенное дифференциальное уравнение упругой линии, применимое в пределах закона Гука, т.е. для напряжений $\sigma_{кр}$, вызванных в стержне критической силой, не превосходящих предела пропорциональности $\sigma_{пц}$, т. е.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}. \quad (10.11)$$

Из (10.11) найдем предельную гибкость стержня (наименьшее значение гибкости, при котором формула Эйлера применима)

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (10.11)$$

Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня применима при условии, что его гибкость больше предельной

$$\lambda \geq \lambda_{пред}. \quad (10.12)$$

Предельная гибкость зависит от физико-механических свойств материала стержня: модуля упругости и предела пропорциональности.

Для стали 3: $\sigma_{пц} = 200$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Предельная гибкость для стали 3

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

10.4 Формула Ф. Ясинского

Многие конструкции имеют стержни с гибкостью меньше предельной $\lambda_{пред}$. Метод расчета на устойчивость таких стержней разработал Ф. Ясинский.

На основе обработки и анализа значительного объема экспериментальных зависимостей $\sigma_{кр}$ от λ для различных материалов Ф. Ясинский предложил приближенные формулы для критических напряжений за пределами упругости. Типичный график зависимости критического напряжения $\sigma_{кр}$ от гибкости λ для стержней из пластичного материала (низкоуглеродистой стали) приведен на рис. 10.4.

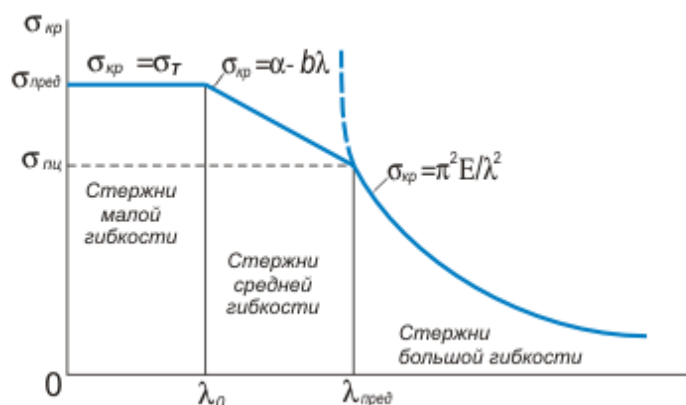


Рисунок 10.4 - Экспериментальная зависимость $\sigma_{кр}$ от λ для стержней из пластичного материала

На основании зависимости на рис. 10.4 по характеру потери устойчивости выделяют 3 группы стержней:

- большой гибкости $\lambda \geq \lambda_{пред}$;
- средней гибкости $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{пред}$;
- малой гибкости $\lambda \leq \lambda_0$.

Критические напряжения для стержней *большой гибкости* определяют по формуле Л. Эйлера.

Для стальных стержней *средней гибкости* критические напряжения имеют значения выше предела пропорциональности и ниже предельного напряжения (предела текучести для пластичных материалов и предела прочности для хрупких материалов) и изменяются по закону, близкому к линейному

$$\sigma_{\epsilon\delta} = a - b\lambda, \quad (10.13)$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала.

Зависимость (10.13) называется формулой Ф. Ясинского.

Стержни с *малой гибкостью* теряют грузоподъемность не из-за потери устойчивости прямолинейной формы равновесия, а из-за разрушения материала от сжатия при достижении в них предельных напряжений (предела текучести σ_T при пластичных материалах или предела прочности σ_B при хрупких материалах). Такие стержни рассчитывают не на устойчивость, а на прочность при простом сжатии.

Таким образом, зависимость $\sigma_{кр}$ от λ на рис. 10.4 состоит из трех частей: гиперболы Эйлера при $\lambda \geq \lambda_{пред}$, наклонной прямой Ф. Ясинского при $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{пред}$ и горизонтальной прямой $\sigma_{кр} = \sigma_T$ при $\lambda \leq \lambda_0$.

Экспериментально найденные значения a , b , λ_0 и $\lambda_{пред}$ для различных материалов приведены в табл. 10.3.

Таблица 10.3 – Значения коэффициентов a , b , λ_0 и $\lambda_{пред}$

Материал	a	b	λ_0	$\lambda_{пред}$
	МПа			
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь 20, Ст4	328	1,15	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85
Дюралюмин Д16Т	406	1,83	30	53
Сосна, ель	29,3	0,194	-	70

Критическая сила

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A. \quad (10.13)$$

Пример 10.1. Проверить на устойчивость сжатый стержень на рис. 10.5 при и исходных данных: $\sigma_{стц} = 230$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[n_y] \geq 4$.

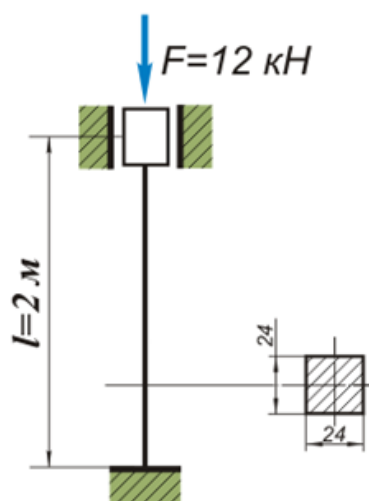


Рисунок 10.5 – Расчетная схема стержня

Решение. Предельная гибкость стержня

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{стц}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{230}} = 92,5.$$

Минимальный момент инерции квадратного сечения стержня

$$J_{мин} = J_o = \frac{b^4}{12} = \frac{0,024^4}{12} = 2,765 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Площадь сечения

$$A = b^2 = 0,024^2 = 5,76 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{2,765 \cdot 10^{-8}}{5,76 \cdot 10^{-4}}} = 6,93 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Коэффициент приведения длины из условий закрепления концов стержня (см. рис. 10.2) $\mu = 0,5$.

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 2}{6,93 \cdot 10^{-3}} = 144,3.$$

Так как $\lambda = 144,3 \geq \lambda_{пред} = 92,5$ критическую силу определяем по формуле Л. Эйлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2,765 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 0,5)^2} 10^{-3} = 54,6 \text{ кН.}$$

Коэффициент запаса на устойчивость

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{54,7}{12} = 4,54 > [n_y] = 4.$$

Условие устойчивости стержня выполнено.

10.5 Выбор сечения сжатого стержня

При проектном расчете задают материал, форму и площадь поперечного сечения и по расчетной схеме проверяют выполнение условия устойчивости стержня (10.9). При невыполнении условия устойчивости размеры сечения увеличивают, а при значительном запасе устойчивости - уменьшают и повторяют расчет.

Отношение допускаемых напряжений на устойчивость, определяемых по формуле (10.7), к допускаемым напряжениям на прочность, определяемых по формуле (1.5)

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр}}{n_y} : \frac{\sigma_{пред}}{n} = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{пред}} \cdot \frac{n}{n_y}.$$

Откуда
$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{пред}} \cdot \frac{n}{n_y} [\sigma] = \varphi[\sigma],$$

или

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma], \quad (10.13)$$

где φ – коэффициент продольного изгиба (коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения для сжатых стержней).

Зависимости $\varphi = \varphi(\lambda)$ для каждого материала устанавливается экспериментальным путем. Обычно они представляются в виде таблиц. Значения коэффициента φ для стали 3 приведены в табл. 10.3.

Таблица 10. 4 – Коэффициенты продольного изгиба для стали 3

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	1,00	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60
λ	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
φ	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	

Подбор сечения сжатого стержня проводят по полной диаграммы критических напряжений и зависимости $\varphi = \varphi(\lambda)$.

Из условия устойчивости и (10.13)

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y] = \varphi[\sigma]$$

следует

$$\frac{F}{A} = \varphi[\sigma]. \quad (10.14)$$

В уравнении (10.14) две неизвестных величины: площадь поперечного сечения A и коэффициент φ .

Подбор площади поперечного сечения A проводят по уравнению (10.14) методом последовательных приближений по алгоритму:

1) задать коэффициент φ_i (i – номер итерации); в первом приближении можно принять $\varphi_1 = 0,5$;

2) вычислить площадь сечения

$$A_i = F / (\varphi_i [\sigma]);$$

3) для заданной формы сечения стержня вычислить:

- размеры сечения;
- наименьший момент инерции сечения J_{\min} ;
- радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A_i}};$$

- гибкость

$$\lambda_i = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

4) по зависимости $\varphi = \varphi(\lambda)$ для значения λ_i определить φ_i^* ;

5) если $|(\varphi_i^* - \varphi_i) / \varphi_i| > [\varepsilon]$, то принять $\varphi_{i+1} = (\varphi_i^* + \varphi_i) / 2$, положить номер итерации i равным $(i+1)$ и перейти к п. 2; обычно принимают $[\varepsilon] = 0,01 \dots 0,05$;

б) выполнить проверку стержня на устойчивость

$$\sigma = \frac{F}{A_i} \leq \varphi_i [\sigma]. \quad (10.14)$$

Пример 10.2. Подобрать из расчета на устойчивость прямоугольное сечение стержня из стали 3 на рис. 10.6; допускаемое напряжение на прочность $[\sigma] = 160$ МПа.

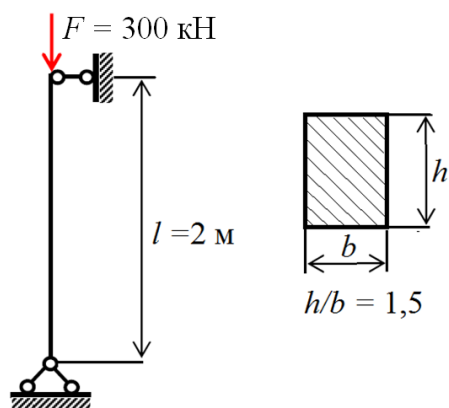


Рисунок 10.6 – Расчетная схема стержня

Решение. Подбор площади поперечного сечения A проводим методом последовательных приближений.

Первое приближение ($i = 1$)

Примем коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$.

Площадь сечения

$$A_1 = F / (\varphi_1 [\sigma]) = 300 \cdot 10^3 / (0,5 \cdot 160 \cdot 10^6) = 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Размеры сечения

$$b = \sqrt{A_1 / (h/b)} = \sqrt{3,75 \cdot 10^{-3} / 1,5} = 0,05 \text{ м};$$

$$h = b (h/b) = 0,05 \cdot 1,5 = 0,075 \text{ м}.$$

Наименьший момент инерции сечения по формуле (5.20)

$$J_{\min} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{0,05^3 \cdot 0,075}{12} = 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4.$$

Радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A_1}} = \sqrt{\frac{7,8 \cdot 10^{-7}}{3,75 \cdot 10^{-3}}} = 0,0144 \text{ м.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2}{0,0144} = 139.$$

По зависимости $\varphi = \varphi(\lambda)$ (табл. 10.4) для значения $\lambda_1 = 139$ определяем интерполяцией

$$\varphi_1^* = 0,364.$$

Так как $|(\varphi_1^* - \varphi_1) / \varphi_1| = |(0,364 - 0,5) / 0,5| = 0,64 > 0,01$,
примем

$$\varphi_2 = (\varphi_1^* + \varphi_1) / 2 = (0,364 + 0,5) / 2 = 0,432.$$

Второе приближение ($i = 2$)

Площадь сечения

$$A_2 = F / (\varphi_2 [\sigma]) = 300 \cdot 10^3 / (0,432 \cdot 160 \cdot 10^6) = 4,34 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Размеры сечения

$$b = \sqrt{A_2 / (h / b)} = \sqrt{4,34 \cdot 10^{-3} / 1,5} = 0,054 \text{ м};$$

$$h = b (h / b) = 0,05 \cdot 1,5 = 0,081 \text{ м.}$$

Наименьший момент инерции сечения по формуле (5.20)

$$J_{\min} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{0,054^3 \cdot 0,081}{12} = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A_2}} = \sqrt{\frac{1,06 \cdot 10^{-6}}{4,34 \cdot 10^{-3}}} = 0,0156 \text{ м.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2}{0,0156} = 128.$$

По зависимости $\varphi = \varphi(\lambda)$ (табл. 10.4) для значения $\lambda_2 = 128$ определяем интерполяцией

$$\varphi_2^* = 0,41.$$

Так как $|(\varphi_2^* - \varphi_2) / \varphi_2| = |(0,41 - 0,432) / 0,432| = 0,05 > 0,01$,
примем

$$\varphi_3 = (\varphi_2^* + \varphi_2) / 2 = (0,41 + 0,432) / 2 = 0,421.$$

Третье приближение ($i = 3$)

Площадь сечения

$$A_3 = F / (\varphi_3 [\sigma]) = 300 \cdot 10^3 / (0,421 \cdot 160 \cdot 10^6) = 4,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Размеры сечения

$$b = \sqrt{A_3 / (h/b)} = \sqrt{4,45 \cdot 10^{-3} / 1,5} = 0,055 \text{ м};$$

$$h = b (h/b) = 0,05 \cdot 1,5 = 0,082 \text{ м}.$$

Наименьший момент инерции сечения по формуле (5.20)

$$J_{\min} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{0,055^3 \cdot 0,082}{12} = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A_3}} = \sqrt{\frac{1,14 \cdot 10^{-6}}{4,45 \cdot 10^{-3}}} = 0,016 \text{ м}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda_3 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2}{0,016} = 125.$$

По зависимости $\varphi = \varphi(\lambda)$ (табл. 10.4) для значения $\lambda_2 = 125$ определяем интерполяцией

$$\varphi_3^* = 0,425.$$

Так как $|(\varphi_3^* - \varphi_3) / \varphi_3| = |(0,425 - 0,421) / 0,421| = 0,009 < 0,01$,

то окончательно примем размеры сечения

$$b = 0,055 \text{ м}; \quad h = 0,082 \text{ м}.$$

Проверка стержня на устойчивость

$$\sigma = \frac{F}{A_i} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,055 \cdot 0,082} 10^{-6} = 66,5 \text{ МПа} < \varphi_3 [\sigma] = 0,421 \cdot 160 = 67,4 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости стержня выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков А.Ф., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. Учебник для вузов. «Высш. школа», 1975. 654 с.
2. Сопротивление материалов. Феодосьев В.И., «Наука», 1972. 595 с.
3. Сопротивление материалов / Под ред. Г. С. Писаренко. Киев, Вища шк., 1986. – 775 с.
4. Шевченко Ф. Л. Курс сопротивления материалов. Учебное пособие. – Донецк, 2013 г. – 260 с.
5. Сборник задач по сопротивлению материалов. Учеб. пособие для вузов. Под ред. А.В. Александрова. М., Стройиздат, 1977. – 335 с.

Савенков Вячеслав Николаевич
Тимохина Валентина Юрьевна
Тимохин Юрий Витальевич

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие
для студентов механических специальностей

Компьютерный макет *Тимохин Ю. В.*

Технический редактор *Пасько Л.С.*

Подписано к печати 27.10.2018 г.
Формат 60×84/16. Бумага писчая. Гарн. Times New Roman.
Печать на ксероксе
Усл. печ. листов 7,9. Тираж 25 экз. Заказ №

Донецкий институт железнодорожного транспорта

Напечатано в редакционно-издательском отделе ДонИЖТ
283018 г. Донецк – 18, ул. Горная, 6
