

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.....	2
1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	2
1.1 Введение.....	2
1.2 Объекты расчета.....	2
1.3 Внешние силы (нагрузки).....	3
1.4 Внутренние силы (усилия). Метод сечений.....	4
1.5 Виды деформации стержней.....	7
1.6 Напряжения.....	7
1.7 Допускаемые напряжения. Условие прочности.....	10
1.8 Перемещения и деформации.....	10
1.9 Основные гипотезы сопротивления материалов.....	12
2 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.....	12
2.1 Продольная сила.....	12
2.2 Нормальные напряжения. Условие прочности.....	15
2.3 Продольные и поперечные деформации. Условие жесткости.....	18
2.4 Механические свойства материалов. Испытания материалов на растяжение и сжатие.....	20
2.5 Допускаемые напряжения при растяжении (сжатии).....	26
2.6 Пример расчета стержня на растяжение.....	27
2.7 Расчет статически неопределимых систем на растяжение (сжатие).....	30
3 СДВИГ.....	32
3.1 Понятие о сдвиге.....	32
3.2 Касательные напряжения. Условие прочности.....	33
4 КРУЧЕНИЕ.....	33
4.1 Крутящий момент. Эпюры крутящих моментов.....	33
4.2 Касательные напряжения.....	36
4.3 Геометрические характеристики сечений.....	39
4.4 Условие прочности.....	40
4.5 Деформации при кручении. Условие жесткости.....	41
5 ИЗГИБ.....	42
5.1 Основные понятия.....	42
5.2 Типы опор балок. Типы балок.....	43
5.3 Определение опорных реакций в балках.....	45
5.4 Внутренние силовые факторы при изгибе.....	46
5.5 Дифференциальные зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом.....	48
5.6 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.....	50
5.7 Нормальные напряжения при прямом чистом изгибе.....	54
5.8 Геометрические характеристики простых сечений.....	60
5.9 Нормальные и касательные напряжения при прямом поперечном изгибе.....	61
5.10 Деформации при изгибе.....	66
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	73

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1 Введение

Сопротивление материалов – наука о методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений.

При эксплуатации элементы машин и сооружений подвергаются влиянию внешних нагрузок, которые приводят к их деформации (изменению размеров и формы), а в некоторых случаях и разрушению. Для обеспечения безопасной и долговечной работы машин и сооружений их элементы должны удовлетворять условиям прочности, жесткости и устойчивости.

Прочность – способность конструкции и ее элементов выдерживать воздействие внешней нагрузки, не разрушаясь.

Жесткость – способность конструкции и ее элементов противодействовать изменению начальных размеров и формы при действии внешней нагрузки.

Устойчивость – способность конструкции и ее элементов сохранять начальную форму упругого равновесия.

1.2 Объекты расчета

Конструктивные элементы машин и сооружений можно свести к одному из трех видов тел: брусу, оболочке или массивному телу.

Брусом, или стержнем, называют тело, один из размеров которого (длина) значительно больше двух других размеров. Брусья бывают прямолинейные (рисунок 1, а, в, г), криволинейные (рисунок . 1, б).

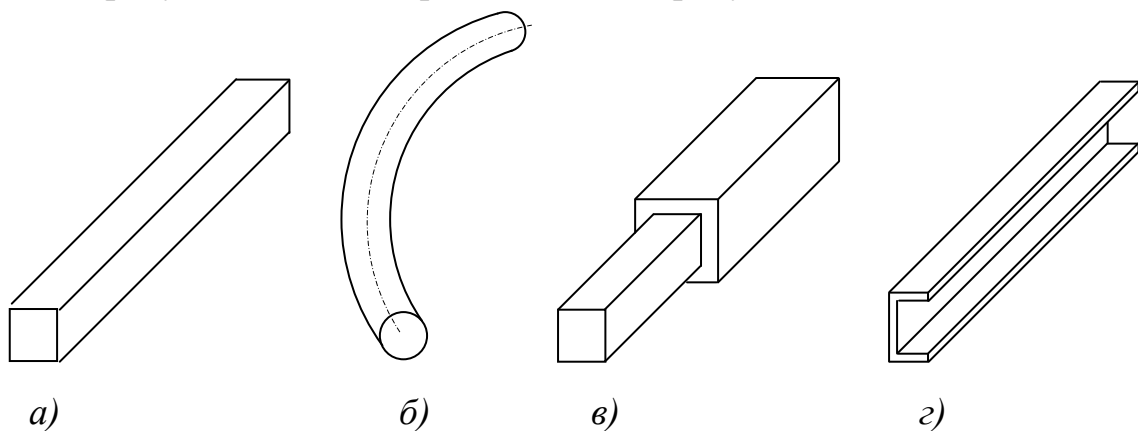


Рисунок 1.1 – Брусья

Оболочка – это тело, один из размеров которого (толщина) значительно меньше двух других. Оболочки бывают цилиндрические (рисунок 1.2, *а*), конические (рисунок 1.2, *б*), сферические (рисунок 1.2, *в*) и другие. Плоские оболочки называются пластинками (рисунок 1.2, *г*, *д*).

Массивные тела имеют все три размера одного порядка.

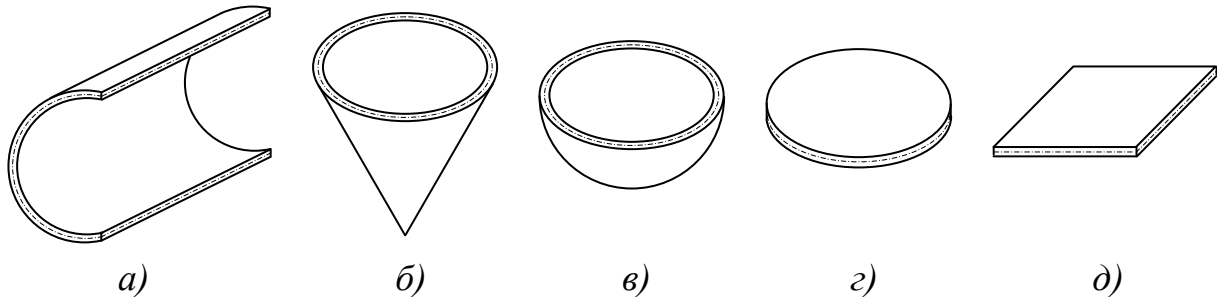


Рисунок 1.2 – Оболочки

В сопротивлении материалов рассматриваются в основном изолированные отдельные элементы конструкций типа стержней. Из стержней составляются большинство конструкций и сооружений: каркасы домов, опоры линий электропередачи, фермы подъемных кранов, валы и оси механизмов, рамы машин и т.п.

Расчеты на прочность, жесткость и устойчивость оболочек и массивных тел значительно более сложные, чем расчеты стержней, и рассматриваются в специальных курсах.

1.3 Внешние силы (нагрузки)

Силы, которые действуют на элемент конструкции со стороны других тел, относительно элемента являются внешними. Внешние силы называются нагрузками. Они приложены к некоторым участкам поверхности элемента или распределены по объему. К объемным силам относят вес элемента, силы инерции, электромагнитные силы. К поверхностным относят, например, силу атмосферного давления, силы давления сыпучих грузов, силу давления колеса на рельс и т.д.

Нагрузки делятся на сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенная нагрузка действует по малой в сравнении с размерами детали площади и условно принимается приложенной в точке (рисунок 1.3). Сосредоточенную нагрузку будем обозначать буквой F , его размерность Н и кН.

Распределенная нагрузка – это нагрузка, приложенная к участку тела большой площади или объему, и при составлении расчетной схемы ее нельзя заменить сосредоточенной. Обычно распределенную нагрузку приводят к нагрузке, которая приходится на единицу длины тела. Обозначает-

ся распределенная нагрузка буквой q , его размерность Н/м, или кН/м (рисунок 1.4).

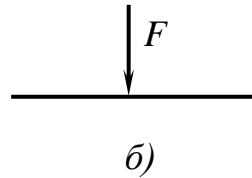
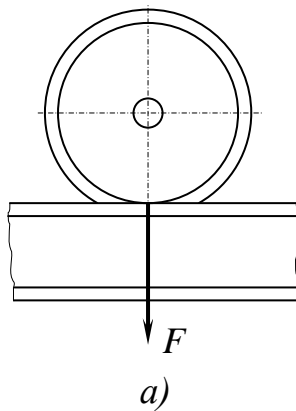


Рисунок 1.3 – Сосредоточенная нагрузка:

a – конструктивная схема;

б – расчетная схема

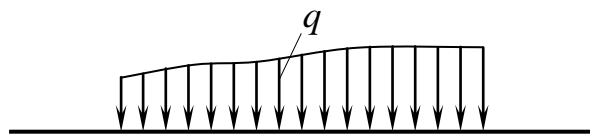


Рисунок 1.4 – Распределенная нагрузка

По характеру влияния на элементы конструкций нагрузки делятся на статические и динамические.

Статические нагрузки не изменяют свою величину и положение на теле на протяжении значительного времени и не вызывают значительных его ускорений. Силами инерции при статической нагрузке можно пренебречь.

Динамические нагрузки изменяют величину и положение на теле со временем, а потому вызывают значительные ускорения тела. Возникающими при этом силами инерции пренебречь нельзя. Динамические нагрузки делятся на мгновенно приложенные, ударные и повторно-переменные.

1.4 Внутренние силы (усилия). Метод сечений

При действии внешних сил на тело в нем возникают внутренние силы, которые препятствуют изменению формы и размеров тела. Эти внутренние силы являются предметом изучения сопротивления материалов. Их называют внутренними усилиями.

Внутренние усилия определяются методом сечений, суть которого рассмотрим на таком примере.

Тело, которое под действием внешней нагрузки находится в состоянии статического равновесия, условно рассечем на две части сечением, внутреннее усилие в котором необходимо определить (рисунок

1.5, *a*). Условно отбросим любую часть тела по одну сторону от сечения. Действие отброшенной части тела на оставшуюся часть заменим соответствующими внутренними усилиями (рисунок 1.5, *б*).

Любая система внутренних усилий, которые действуют в сечении, может быть приведена к главному вектору сил \vec{R} , например, приложенному в центре тяжести сечения, и главному моменту \vec{M} относительно центра тяжести сечения (рисунок 1.5, *в*).

Поскольку все тело находится в состоянии статического равновесия, то и отсеченная часть должна быть уравновешена. Для отсеченной части стержня внутренние усилия вместе с другими внешними силами входят в уравнение равновесия и могут быть определены из них.

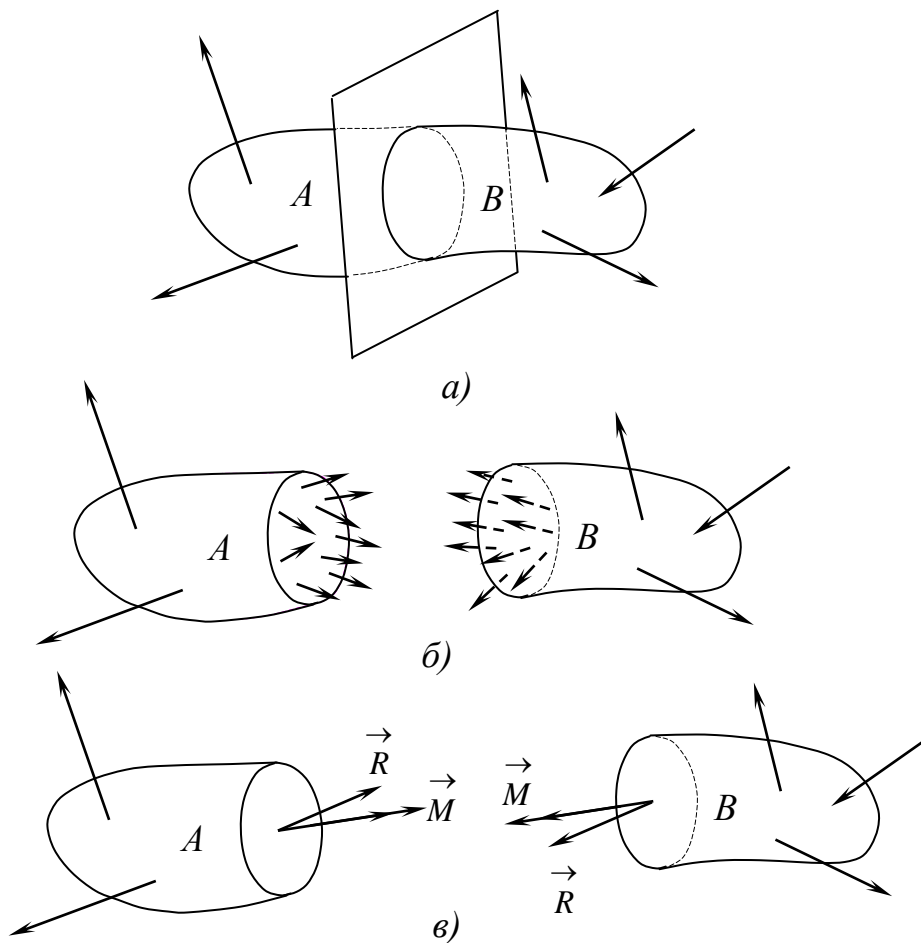


Рисунок 1.5 – Внутренние усилия в сечении нагруженного тела

Согласно закону Ньютона в этом же сечении отброшенной части тела действуют такие же внутренние усилия, но направленные противоположно.

Более подробно рассмотрим определение внутренних усилий в стержнях (рисунок 1.6). Рассечем стержень, нагруженный уравновешенной системой внешних нагрузок $F_1 \dots F_n$, поперечным сечением (рисунок 1.6, *a*). Примем для стержней такое расположение координатных осей : ось

z направим вдоль продольной оси стержня, оси x и y – перпендикулярно к ней (рисунок 1.6, б). Если поперечное сечение стержня имеет оси симметрии, то оси x и y , соответственно, совпадают с осями симметрии. Усилия, как правило, определяются для поперечных сечений, перпендикулярных продольной оси z .

Для удобства определения внутренних усилий разложим главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M} на составляющие по осям координат:

$$\vec{R} = \vec{Q}_x + \vec{Q}_y + \vec{N}; \quad \vec{M} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_k. \quad (1.1)$$

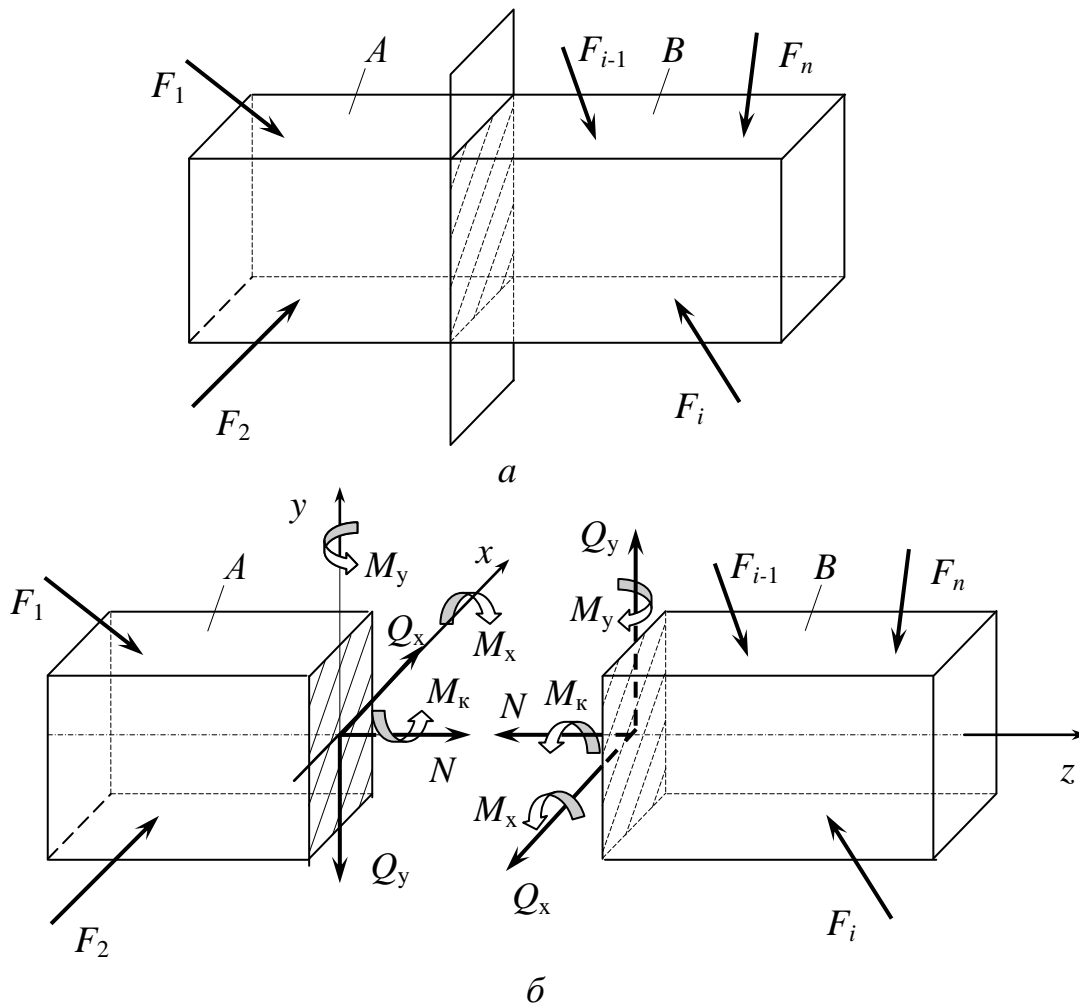


Рисунок 1.6 – Внутренние усилия в сечении нагруженного стержня

Для упрощения на рисунке 1.6 не показаны векторы \vec{R} и \vec{M} , а вместо составляющих $\vec{M}_x, \vec{M}_y, \vec{M}_k$ указаны только направления их действия.

Составляющие главного вектора сил и главного момента называются внутренними силовыми факторами и имеют свои названия, связанные с деформациями:

Q_x, Q_y – поперечные силы; N – продольная сила;
 M_x, M_y – изгибающие моменты; M_k – крутящий момент.

Силовые факторы в сечении стержня можно определить из условий равновесия отсеченной части стержня (из уравнений статики):

$$\begin{aligned} 1) \sum F_i^z = 0; \quad 2) \sum F_i^x = 0; \quad 3) \sum F_i^y = 0; \\ 4) \sum M_i^z = 0; \quad 5) \sum M_i^x = 0; \quad 6) \sum M_i^y = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\sum F_i^z; \sum F_i^x; \sum F_i^y$ – суммы проекций внешних сил на оси координат z, x и y , приложенных к стержню по одну сторону от сечения;

$\sum M_i^z; \sum M_i^x; \sum M_i^y$ – суммы моментов внешних сил относительно осей координат z, x и y , приложенных к стержню по одну сторону от сечения.

Из первого уравнения условий равновесия (1.2) определяется продольная сила N ; из второго и третьего уравнений – соответственно поперечные силы Q_x и Q_y ; из четвертого уравнения – крутящий момент M_k ; из пятого и шестого уравнений – соответственно изгибающие моменты M_x и M_y .

1.5 Виды деформации стержней

Внутренние усилия в разных сечениях тела неодинаковы. Деформирование того или другого элемента зависит от того, какие усилия на него действуют. Если в поперечном сечении возникает лишь один внутренний силовой фактор, то такой случай деформации называют простым видом деформации. К простым видам деформаций относятся: растяжение (сжатие), сдвиг (срез), кручение, чистый изгиб.

Растяжение (сжатие) имеет место тогда, когда на стержень действуют внешние силы вдоль его оси. Тогда в его любых поперечных сечениях возникает только продольная сила N (рисунок 1.7, а, б). Сдвиг (срез) возникает в тех случаях, когда в поперечном сечении действует поперечная сила Q (рисунок 1.7, в). При кручении в любом поперечном сечении стержня возникает только крутящий момент M_k (рисунок 1.7, г). Чистый изгиб наблюдается, когда в поперечных сечениях стержня действует только изгибающий момент M_x (рисунок 1.7, д).

В тех случаях внешней нагрузки, когда в поперечном сечении стержня одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов, говорят о сложном виде сопротивления стержня.

1.6 Напряжения

Внутренние силовые факторы являются интегральными характеристиками и не позволяют судить о распределении усилий по сечению. Поэтому по их величине невозможно сравнить условия нагружения элемен-

тов конструкций разных размеров и формы и находящихся под действием разного вида внешней нагрузки.

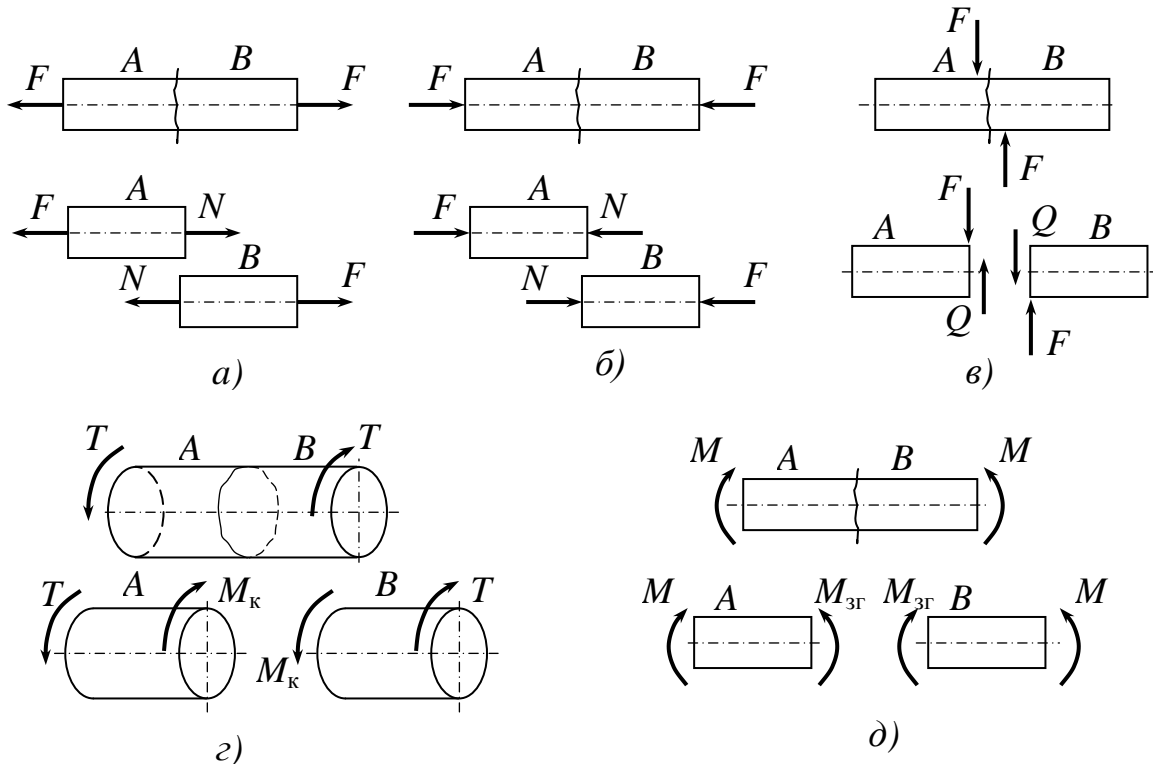


Рисунок 1.7 – Простые виды деформации стержней

Для этого в сопротивлении материалов вводится понятие напряжения.

Выделим в сечении тела в окрестности произвольной точки K с координатами x и y (рисунок 1.8) элементарную площадку dA , на которой действует внутреннее усилие $d\vec{R}$. Размеры площадки примем такими, чтобы изменением внутренних усилий внутри нее можно было пренебречь. Тогда равнодействующая $d\vec{R}$ будет приложена в центре площадки. Силу $d\vec{R}$ разложим на нормальную составляющую dN (проекция на нормаль к площадке) и касательную составляющую dQ (проекция на плоскость сечения).

Величина $p = \frac{dR}{dA}$ называется полным напряжением в данной точке анализируемого сечения.

Аналогично вводятся понятия нормального σ и касательного τ напряжений:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}; \quad \tau = \frac{dQ}{dA}.$$

При необходимости касательное напряжение τ в плоскости сечения может быть разложено на составляющие τ_x и τ_y .

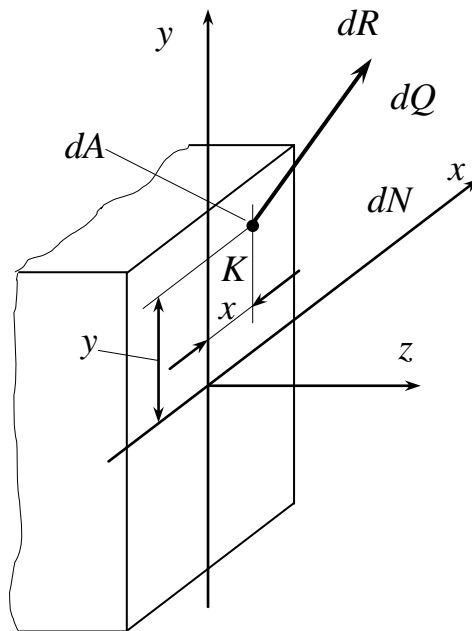


Рисунок 1.8 – Усилия на элементарной площадке сечения стержня

Нормальное напряжение в точке сечения характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц тела, расположенных по обеим сторонам от сечения, а касательное напряжение – интенсивность сил, которые сдвигают эти частицы в плоскости сечения.

Полное, нормальное и касательное напряжение связаны зависимостью

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.3)$$

Напряжение численно равняется внутренней силе, которая действует на единицу площади в данной точке. Размерность напряжения $1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1 \text{ Па} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}$. Суммируя по сечению тела элементарные внутренние нормальные силы σdA и касательные силы τdA и их элементарные моменты относительно осей x , y и z , получим зависимости, которые связывают напряжения и внутренние усилия

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_A \tau_x dA; & M_x &= -\int_A \sigma y dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_y dA; & M_y &= -\int_A \sigma x dA; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$N = \int_A \sigma dA; \quad M_{\kappa} = \int_A (\tau_{xy} - \tau_{yx}) dA.$$

Распределение напряжений по сечению не может быть определено из этих уравнений, так как число точек в сечении бесконечно, а уравнений – шесть.

1.7 Допускаемые напряжения. Условие прочности

Напряжения $\sigma_{\text{пр}}$ и $\tau_{\text{пр}}$, при которых происходит разрушение материала или возникают значительные пластические (остаточные) деформации называются предельными. Их значения определяются при испытаниях материала.

Чтобы не допустить разрушения элементов конструкций, возникающие в элементах напряжения σ и τ не должны превышать допускаемых напряжений $[\sigma]$ или $[\tau]$.

Допускаемые напряжения $[\sigma]$ или $[\tau]$ – это максимальные нормальные или касательные напряжения, при которых обеспечивается нормальная работа материала. Они задаются как некоторая часть предельных напряжений

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{[n]}; \quad [\tau] = \frac{\tau_{\text{пр}}}{[n]}, \quad (1.5)$$

где $[n]$ – допускаемый коэффициент запаса прочности.

Коэффициент запаса прочности зависит от свойств материала, действующих нагрузок, точности метода расчета, условий работы.

Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям имеют вид

$$\sigma \leq [\sigma]; \quad \tau \leq [\tau], \quad (1.6)$$

где σ , τ – действующие (фактические) напряжения;
 $[\sigma]$, $[\tau]$ – допускаемые напряжения.

1.8 Перемещения и деформации

Под действием внешних нагрузок точки тела перемещаются, а сами тела деформируются (изменяют свои размеры и форму). Как правило, перемещения и деформации незначительные и могут быть зафиксированы только с помощью чувствительных приборов – тензометров.

Для характеристики деформации точек тела вводят понятия относительной линейной деформации и относительной угловой деформации.

Определим эти понятия на примере деформации тела, изображенного на рисунке 1.9. Рассмотрим точки A и B , до нагружения тела расположенные друг от друга на расстоянии l . После приложения нагрузки точки A и B переместятся, соответственно, в положения A' и B' , а расстояние между

ними изменится на величину Δl . Величина Δl является абсолютной линейной деформацией отрезка AB . Она измеряется в единицах длины (м, мм, мкм и др.).

Приближая точку B к A , устремим длину отрезка l к нулю.

Предел отношения абсолютной деформации отрезка к его начальной длине называют относительной линейной деформацией по направлению AB

$$\varepsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.7)$$

Обычно деформации тела определяются по направлению координатных осей. Они обозначаются ε_x , ε_y , ε_z .

Рассмотрим прямой угол $\angle COD$, образованный в недеформированном теле отрезками OC и OD . После приложения нагрузки угол будет $\angle C'O'D'$. Приближая точки C и D к O в пределе получим величину изменения прямого угла $\angle COD$.

$$\gamma_{\angle COD} = \lim_{l \rightarrow 0} (\angle COD - \angle C'O'D'). \quad (1.8)$$

Это изменение прямого угла, выраженное в радианах, называется относительной угловой деформацией в точке A в плоскости, образованной отрезками OC и OD .

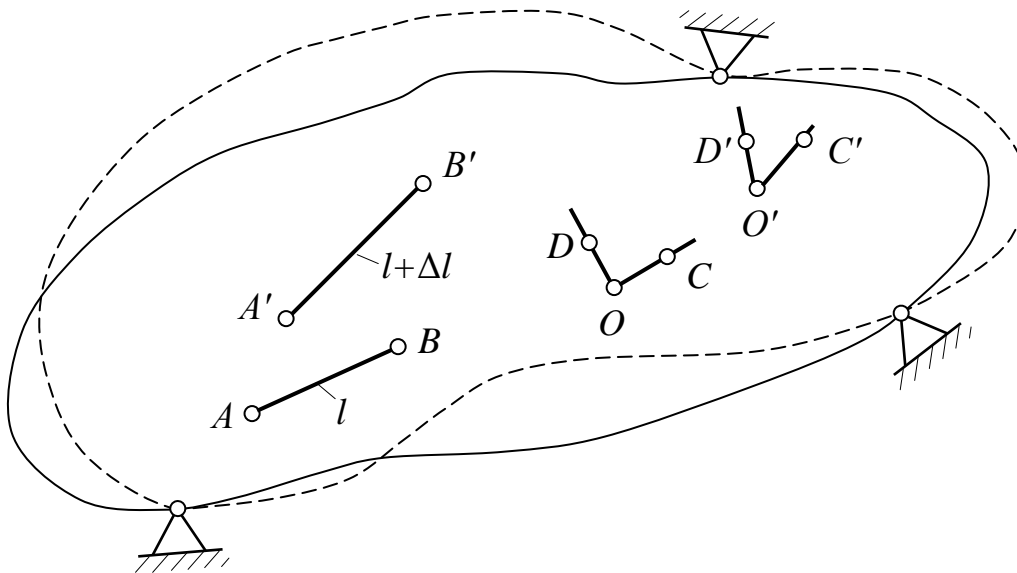


Рисунок 1.9 – Деформации в напряженном теле

Обычно относительные угловые деформации определяют в трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостях. Они обозначаются γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zy} .

1.9 Основные гипотезы сопротивления материалов

Определение напряжений в точках сечения тела по известным значениям внутренних силовых факторов – статически неопределимая задача. Для ее решения уравнения статики (1.4) дополняют геометрическими соотношениями – уравнениями деформаций.

Эти уравнения записываются на основании ряда гипотез (допущений) о свойствах материала и о характере деформаций. Это такие гипотезы:

1. Гипотеза сплошности материала (материал сплошь заполняет форму тела).

2. Гипотеза об однородности и изотропности материала (в любом объеме и направлении свойства материала одинаковы).

3. Гипотеза о малости деформаций (деформации малы по сравнению с размерами тела и ими можно пренебречь при определении положения нагрузок на конструкции).

4. Гипотеза об идеальной упругости материала. Материал имеет абсолютную упругость и для него справедлив закон Гука, который выражает линейную зависимость между нагрузками и деформациями.

5. Принцип суперпозиции (независимости действия сил – позволяет определить результат влияния на конструкцию нескольких нагрузок как сумму результатов каждой нагрузки отдельно).

6. Принцип Сен-Венана (если в пределах некоторой области упругого тела приложена система сил, то на расстоянии, которое существенно превышает характерные размеры этой области, напряжения и деформации практически одинаковы для всех статически эквивалентных систем сил).

7. Гипотеза плоских сечений (поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его продольной оси до приложения к нему нагрузок, остаются плоскими и нормальными к продольной оси и при действии нагрузки).

2 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1 Продольная сила

Растяжение (сжатие) – деформация, при которой в поперечном сечении бруса возникает только продольное растягивающее или сжимающее усилие.

Растягивающие усилия принято считать положительными, сжимающие – отрицательными.

Растяжение (сжатие) вызывается внешними силами, которые действуют вдоль продольной оси стержня.

Деформации растяжения (сжатия) испытывают болты, штанги, каналы, опоры мостов, элементы ферм металлоконструкций и т.п.

Рассмотрим стержень длиной l , который растягивается двумя силами F , направленными вдоль продольной оси z (рисунок 2.1, а).

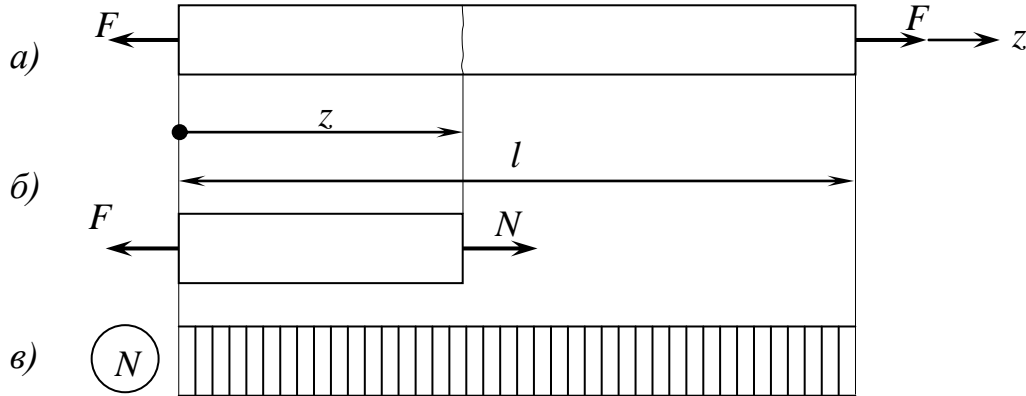


Рисунок 2.1 – Продольные силы в стержне

Для определения внутреннего усилия мысленно разрежем стержень поперечным сечением с координатой z ($0 \leq z \leq l$). Отбросим правую часть стержня, а действие отброшенной части заменим внутренней нормальной силой N (другие силовые факторы в сечении отсутствуют, так как проекции внешних сил на оси x и y равны нулю). Из условия равновесия левой части (суммы проекций сил на ось z) (рисунок 2.1, б)

$$\sum F_z = -F + N = 0$$

находим нормальную силу

$$N = F. \quad (2.1)$$

По закону Ньютона в сечении правой части стержня действует такая же внутренняя сила N , но направленная противоположно. Нетрудно убедиться, что правая часть стержня также уравновешена. Как следует из (2.1) нормальная сила в сечении не зависит от координаты сечения z , во всех сечениях стержня действует та же самая внутренняя сила N .

График изменения продольных сил по длине стержня называется эпюрой продольных сил (рисунок 2.1, в). Для ее построения от базовой линии, проведенной параллельно продольной оси стержня, перпендикулярно откладываем ординаты продольных сил, действующих в сечениях стержня. Штриховка эпюры выполняется прямыми линиями, перпендикулярными базовой линии. В общем случае (когда на стержень действует произвольное число сил разных направлений) выражение (2.1) приводится к виду

$$N = \sum F_{zi}, \quad (2.2)$$

где $\sum F_{zi}$ – алгебраическая сумма проекций внешних сил на продольную ось стержня, приложенных по одну сторону от сечения.

Продольная сила в произвольном сечении стержня равна алгебраической сумме проекций внешних сил на продольную ось, приложенных по одну сторону от сечения. Внешние растягивающие силы (направленные от сечения) берутся со знаком “+”, внешние сжимающие силы (направленные к сечению) – со знаком “–”.

Построим эпюру продольных сил для стержня, расчетная схема которого приведена на рисунке 2.2, а. Стержень закреплен правым концом и нагружен силами $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 3$ кН и $F_3 = 7$ кН.

Разобьем стержень на 3 участка, границами которых являются точки приложения внешних сил.

Мысленно разрежем стержень поперечным сечением с координатой z_1 ($0 \leq z_1 \leq l_1$) на участке 1. Суммируя внешние силы справа от сечения z_1 (рисунок 2.2, а), получим продольную силу в сечении

$$N_1 = -F_1 = -8 \text{ кН.}$$

Сила F_1 сжимает стержень (направлена к сечению z_1), поэтому взята со знаком “–”.

Продольная сила не зависит от координаты сечения z_1 , поэтому во всех сечениях на участке 1 действует одна и та же внутренняя сила N_1 .

Аналогично определяется внутренняя сила для сечений с координатами z_2 ($0 \leq z_2 \leq l_2$) и z_3 ($0 \leq z_3 \leq l_3$), соответственно, для участков 2 и 3:

$$N_2 = -F_1 + F_2 = -8 + 3 = -5 \text{ кН;}$$

$$N_3 = -F_1 + F_2 - F_3 = -8 + 3 - 7 = 2 \text{ кН.}$$

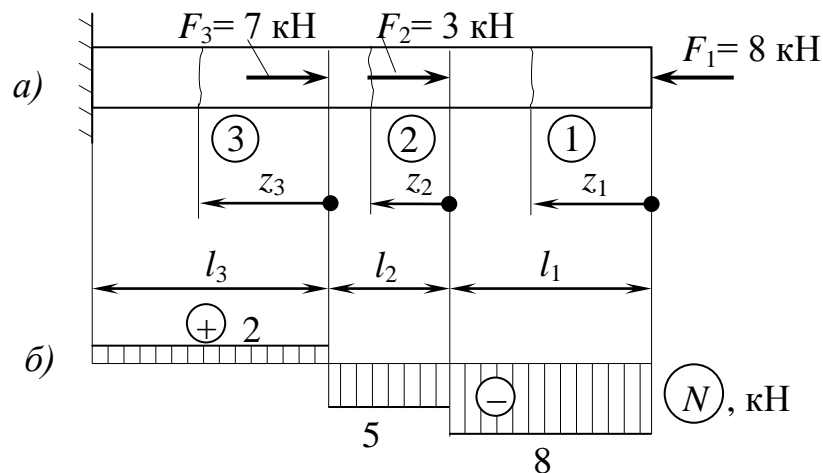


Рисунок 2.2 – Построение эпюры продольных сил

Эти же продольные силы могут быть определены суммированием внешних сил, приложенных слева от сечения z_1 , тем не менее, для этого предварительно необходимо найти опорную реакцию в опоре А.

Эпюра продольных сил стержня приведена на рисунке 2.2, б).

Для длинных или массивных стержней в расчетах необходимо учитывать их собственный вес.

Рассмотрим стержень большой длины, закрепленный верхним концом и нагруженный силой F (рисунок 2.3, а). Площадь поперечного сечения стержня A , удельный вес материала γ .

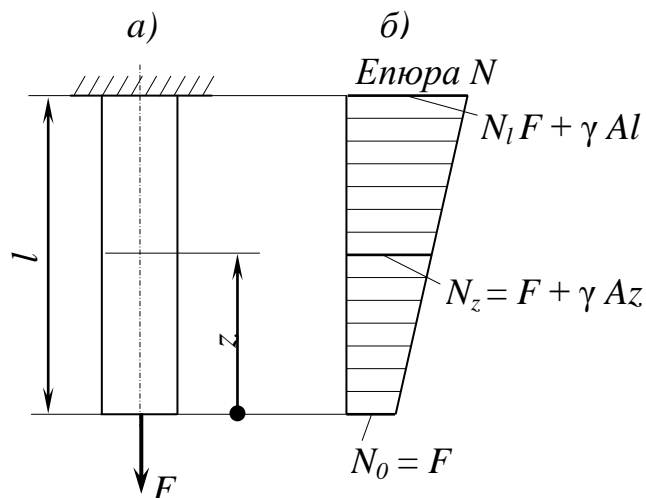


Рисунок 2.3 – Построение эпюры продольных сил с учетом собственного веса стержня

Ниже сечения с произвольной координатой z ($0 \leq z \leq l$) на стержень действует растягивающая сила F и вес участка стержня длиной z :

$$N = F + \gamma A z. \quad (2.3)$$

Зависимость (2.3) – уравнение прямой линии. Для ее построения определим значения продольных сил на концах стержня:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 & \quad N = F; \\ \text{при } z = l & \quad N = F + \gamma A l. \end{aligned}$$

Эпюра продольных сил приведена на рисунке 2.3, б).

2.2 Нормальные напряжения. Условие прочности

Продольная сила N – это равнодействующая элементарных нормальных сил σdA , которые действуют в поперечном сечении стержня (см. формулу (1.4)).

Для определения нормальных напряжений σ по известному значению продольной силы N необходимо знать закон их распределения по сечению.

Это статически неопределимая задача. Она решается с учетом деформации стержня и закона Гука.

Рассмотрим растяжение стержня (изготовленного, например, для большей наглядности, из резины) на поверхности которого нанесена прямоугольная сетка продольных и поперечных линий (рисунок 2.4).

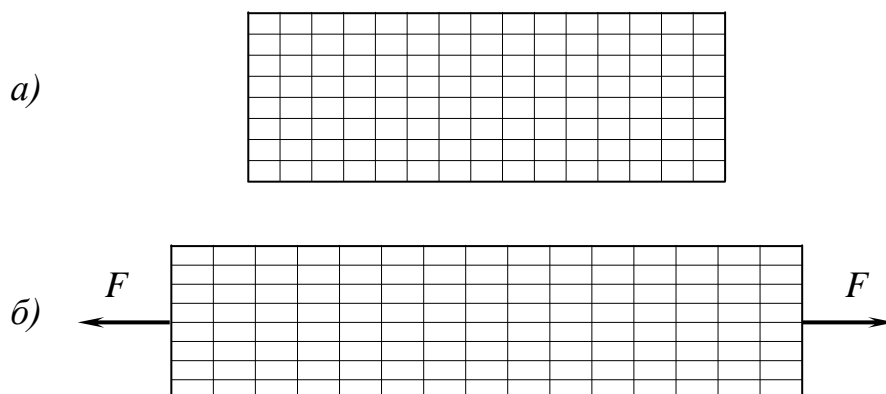


Рисунок 2.4 – Деформация стержня при растяжении:
а – до растяжения; *б* – после растяжения

При действии нагрузки продольные и поперечные линии не искривляются и остаются взаимно перпендикулярными. Изменяются лишь расстояния между ними: между поперечными линиями – увеличиваются, а между продольными – уменьшаются. Если предположить, что внутри стержня деформации имеют тот же характер, что и на поверхности, то полученный результат является подтверждением гипотезы плоских сечений.

Все поперечные сечения перемещаются параллельно и деформация стержня во всех точках поперечного сечения одинакова. По закону Гука в них действуют одинаковые нормальные напряжения

$$\sigma = \text{const} .$$

Поэтому в выражении (1.4) σ можно вынести за знак интеграла

$$N = \sigma \int dA .$$

В таком виде его можно проинтегрировать

$$N = \sigma A ,$$

где A - площадь поперечного сечения стержня.

Откуда

$$\sigma = \frac{N}{A} . \quad (2.4)$$

Фактическое распределение напряжений в сечениях стержня, которые примыкают к месту приложения внешних сил, зависит от способа их приложения и может быть неравномерным. Тем не менее, по мере удале-

ния поперечных сечений от места приложения внешних сил, деформации и эпюры напряжений выравниваются и на расстоянии, приблизительно равном наибольшему из поперечных размеров стержня, распределение напряжений можно согласно принципу Сен-Венана считать практически равномерным. Применение принципа Сен-Венана позволяет не учитывать конкретные способы приложения внешних сил.

Так, на рисунке 2.5 один и тот же стержень, закрепленный верхним концом, нагружается на свободном конце статически эквивалентными нагрузками, равнодействующие которых выражаются величиной вектора F . Нагрузки приложены разными способами: а) в виде сосредоточенной осевой силы; б) в виде двух сил; в) в виде распределенной нагрузки. Исследования показывают, что во всех случаях в поперечном сечении, удаленном на расстояние, которое превышает в 1,5-2 раза его поперечные размеры, напряжения практически одинаковы.

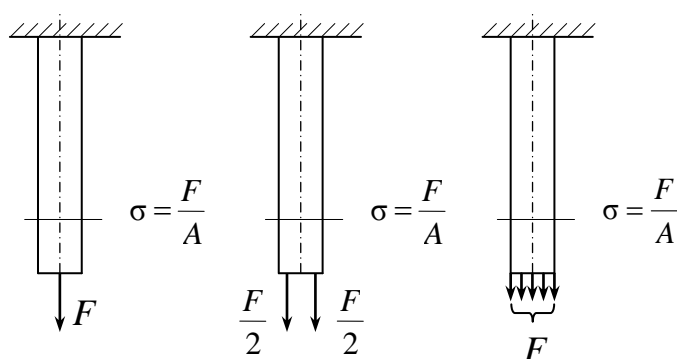


Рисунок 2.5 – Пояснения принципа Сен-Венана

Для обеспечения прочности стержня фактические напряжения в поперечных сечениях стержня не должны превышать допустимых значений, т.е.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (2.5)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение материала бруса на растяжение (сжатие).

Зависимость (2.5) представляет собой условие прочности при растяжении (сжатии).

Из условия (2.5) кроме проверки прочности можно определить:

- площадь поперечного сечения бруса (необходимо при проектном расчете)

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}; \quad (2.6)$$

- допускаемую силу при заданных размерах поперечного сечения

$$N = [\sigma]A. \quad (2.7)$$

2.3 Продольные и поперечные деформации. Условие жесткости

При растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются, при сжатии наоборот, длина уменьшается, а поперечные размеры увеличиваются.

На рисунке 2.6 приведен растянутый стержень. Его деформированный вид показан штриховой линией.

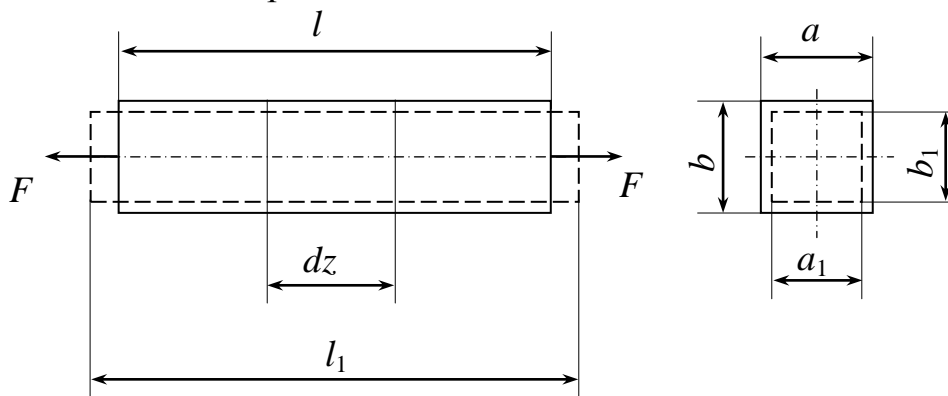


Рисунок 2.6 – Деформации растянутого стержня

Изменение длины стержня $\Delta l = l_1 - l$ называется его абсолютной продольной деформацией.

Вырежем мысленно бесконечно малый элемент бруса длиной dz . После приложения нагрузки он удлинится на величину Δdz . Продольные относительная и абсолютная деформации элемента

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}; \quad \Delta dz = \varepsilon dz.$$

Во всех точках бруса возникает одно и то же напряженное состояние, следовательно, для всех его точек $\varepsilon = \text{const}$. Абсолютное удлинение бруса составит

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dz = \varepsilon \int_0^l dz = \varepsilon l.$$

Откуда относительная продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.8)$$

Между напряжениями и деформациями существует зависимость, известная под названием закона Гука. Для растяжения (сжатия) она имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.9)$$

где E - модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

Модуль упругости первого рода характеризует жесткость материала. Для стали, например, $E = (2...2,1) \cdot 10^5$ МПа, для чугуна $E = (1,15...1,6) \cdot 10^5$ МПа.

Подставив в зависимость (2.9) значение нормального напряжения и относительной деформации из выражений (2.4) и (2.8) получим

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}.$$

Откуда абсолютная продольная деформация бруса

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.10)$$

Произведение EA называется жесткостью поперечного сечения бруса при растяжении (сжатии).

Зависимость (2.10) справедлива для участка бруса постоянного поперечного сечения A , в котором действует постоянная продольная сила N .

Если на участке продольная сила $N(z)$ и площадь поперечного сечения $A(z)$ переменные, тогда абсолютное удлинение участка длиной l определяется по формуле

$$\Delta l = \int \frac{N(z)dz}{EA(z)}. \quad (2.11)$$

Для случая, если продольная сила в пределах участка длиной l изменяется по линейному закону, и площадь сечения A постоянна, выражение (2.11) после интегрирования примет вид

$$\Delta l = \frac{(N_n + N_k)l}{2EA}, \quad (2.12)$$

где N_n ; N_k – соответственно начальное и конечное значения продольного усилия на границах участка стержня.

При растяжении (сжатии) в стержне кроме продольной возникает также поперечная деформация.

Относительная поперечная деформация бруса в направлении размеров a и b (см. рисунок 2.6) соответственно будет

$$\varepsilon'_a = \frac{\Delta a}{a}; \varepsilon'_b = \frac{\Delta b}{b},$$

где $\Delta a = a_1 - a$, $\Delta b = b_1 - b$ – абсолютные поперечные деформации;
 a, b – начальные размеры сечения бруса;
 a_1, b_1 – конечные размеры.

Для изотропных материалов в любом направлении поперечные деформации одинаковы

$$\varepsilon'_a = \varepsilon'_b = \varepsilon'.$$

В пределах справедливости закона Гука при растяжении (сжатии) поперечные деформации пропорциональны продольным деформациям

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (2.13)$$

где μ - коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Знак “–” показывает, что увеличение продольных размеров бруса приводит к уменьшению поперечных размеров и наоборот.

Коэффициент Пуассона характеризует упругие свойства материалов и представляет собой отношение по модулю поперечной деформации к продольной

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.14)$$

Для разнообразных материалов он имеет значение от 0 (пробковое дерево) до 0,5 (резина). Для стали коэффициент Пуассона равняется 0,25...0,3. Для чугуна, цинка, меди он имеет значение от 0,23 до 0,36.

В ряде случаев нормальная эксплуатация машин возможна при условии, когда абсолютные деформации ее элементов не превысят допустимых значений $[\Delta l]$, т.е. при эксплуатации должно выполняться неравенство

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \leq [\Delta l]. \quad (2.15)$$

Неравенство (2.15) представляет собой условие жесткости, а проведенные по нему расчеты являются расчетами на жесткость.

2.4 Механические свойства материалов. Испытания материалов на растяжение и сжатие

Работоспособность элементов конструкции зависит от механических свойств материалов, из которых они изготовлены.

Конструкционные материалы условно можно разделить на пластичные и хрупкие. К пластичным материалам относятся малоуглеродистые стали, алюминий, медь, свинец, латунь и др. Они допускают значительные деформации без разрушения.

Хрупкие материалы (высокоуглеродистые стали, чугун, стекло, металлокерамика, камень, бетон и т.п.) разрушаются без заметной деформации.

Малопластичные материалы (легированные стали, дюралюминий, бронза) занимают промежуточное положение.

Для определения механических характеристик проводят испытания материалов на растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб, твердость и др. Наиболее распространенными являются испытания на растяжение и сжатие при статической нагрузке. Их проводят на разрывных универсальных машинах с механическим или гидравлическим приводами.

Испытания на растяжение. Испытаниям подлежат цилиндрические или плоские образцы (рисунок 2.7). Удлинение определяется по изменению расчетной длины l_0 .

При растяжении образца регистрируют растягивающую силу F и удлинение Δl , по которым строится диаграмма растяжения в координатах сила – удлинение. На испытательных машинах такие диаграммы вычерчиваются автоматически.

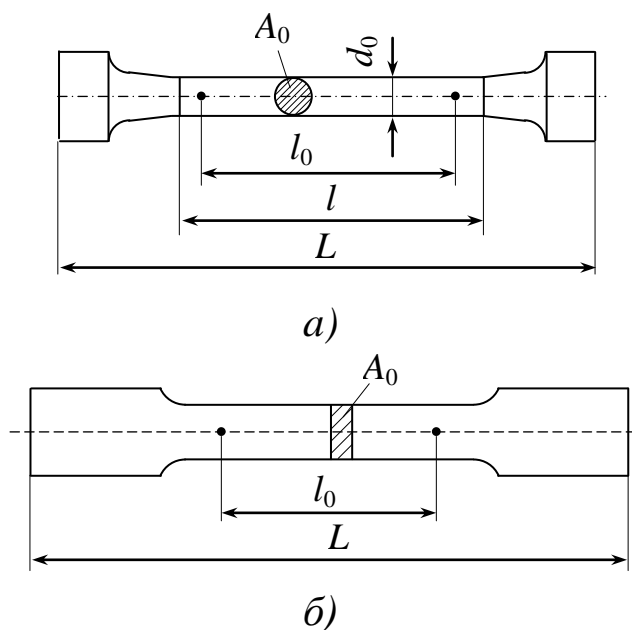


Рисунок 2.7 - Образцы для испытания на растяжение: а) – цилиндрический образец; б) – плоский образец

Диаграмма для пластичной малоуглеродистой стали показана на рисунке 2.8.

На диаграмме можно выделить шесть участков.

Первый участок (OA) – зона упругих деформаций, в которой имеет место линейная зависимость между нагрузкой и удлинением, т.е. в пределах прямой OA справедлив закон Гука.

Второй участок (AB) – зона упругих деформаций, в которой зависимость между нагрузкой и удлинением нелинейна. К точке B деформации

остаются упругими, т.е. при снятии нагрузки деталь восстанавливает свои размеры и форму.

Третий участок (BC) – участок, на котором появляются пластические деформации образца. Этот процесс называется текучестью материала. На этом участке имеет место нелинейная зависимость между нагрузкой и удлинением образца.

Четвертый участок (CD) – горизонтальный участок, на котором деформации возрастают без увеличения нагрузки. Этот участок называется площадкой текучести.

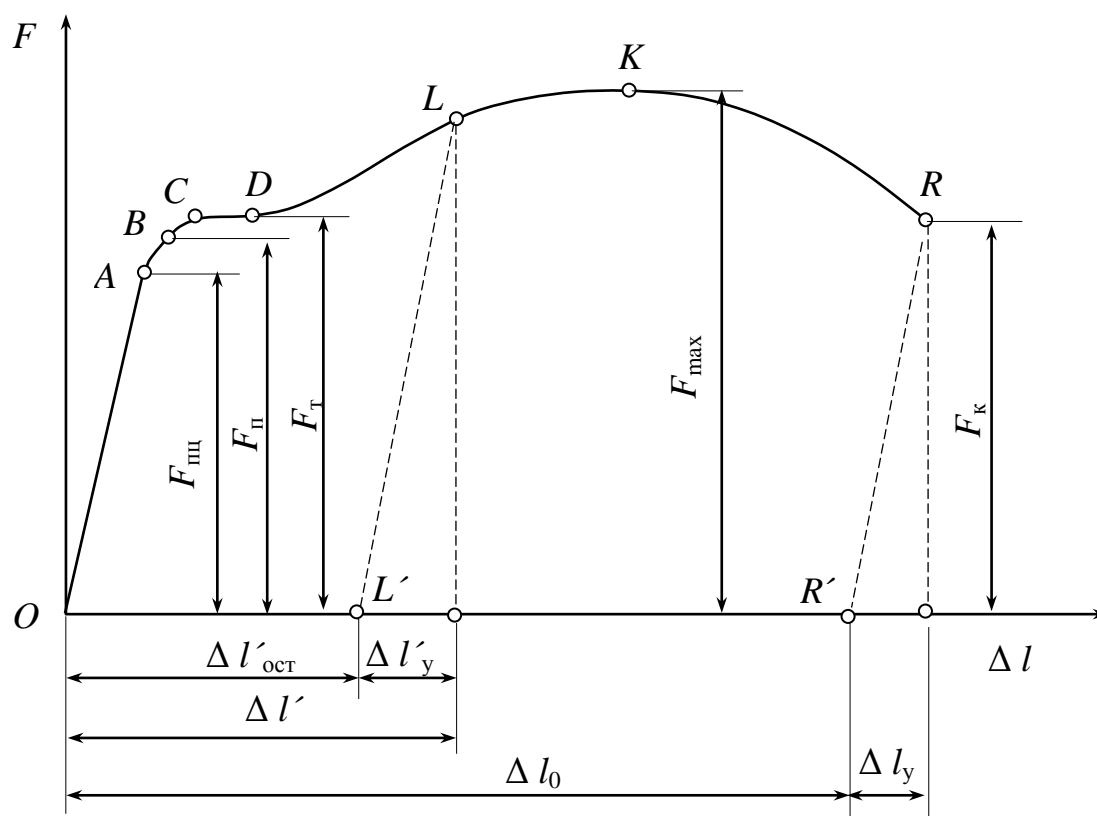


Рисунок 2.8 – Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Пятый участок (DK) – зона упрочнения. Если образец нагрузить силой, которая соответствует, например, точке L диаграммы, а потом снять нагрузку, то процесс разгрузки отображается прямой LL' , параллельной OA . Образец при этом будет иметь остаточную деформацию $\Delta l'_{ост}$. При повторной нагрузке процесс будет проходить по прямой $L'L$. При этом участок, в пределах которого справедлив закон Гука, увеличится ($L'L > OA$). Упругая деформация при этом составит $\Delta l'_y$. Явление упрочнения материала в результате удлинения материала за пределом текучести, называется наклёпом.

Шестой участок (KR) – местная текучесть. Деформация образца на этом участке характеризуется появлением шейки и удлинением образца за счет его утончения (рисунок 2.9). В точке R происходит разрушение образца.



Рисунок 2.9 – Местная деформация образца

Остаточное удлинение образца после разрыва – Δl_0 , упругая деформация – Δl_y (см. рисунок 2.8).

Для исключения зависимости диаграммы растяжения от размеров образца ее перестраивают в координатах “напряжение - относительная деформация” по формулам:

$$\sigma = \frac{F}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Такая диаграмма называется диаграммой напряжений (рисунок 2.10).

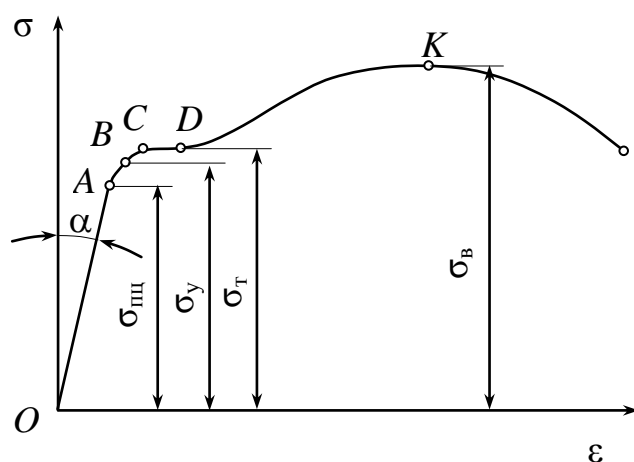


Рисунок 2.10 – Диаграмма напряжений малоуглеродистой стали при растяжении

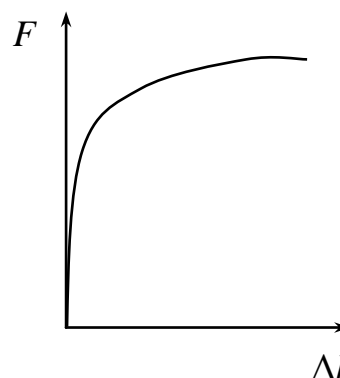


Рисунок 2.11 – Диаграмма растяжения среднеуглеродистой стали

Она имеет следующие характерные точки:

$\sigma_{пц}$ – предел пропорциональности (наибольшее напряжение, до которого выполняется закон Гука);

σ_B – предел упругости (наибольшее напряжение, при котором остаточная деформация не проявляется);

σ_T – предел текучести (напряжение, при котором происходит деформация без увеличения нагрузки);

σ_B – предел прочности или временное сопротивление (напряжение, соответствующее силе F_{max} , предшествующей разрушению образца).

При испытаниях на растяжение также определяют:

E – модуль упругости первого рода:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.16)$$

где σ , ε – напряжение и относительная деформация образца, которые отвечают любой точке прямолинейного участка диаграммы (прямая OA);

α – угол наклона прямолинейного участка диаграммы к горизонтальной оси (см. рисунок 2.10);

ε – относительное остаточное удлинение после разрыва:

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100\% = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%, \quad (2.17)$$

где l_1 – длина образца после разрыва (измеряется путем состыковки двух частей разорванного образца);

ψ – относительное сужение после разрыва:

$$\psi = \frac{\Delta A_0}{A_0} \cdot 100\% = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%, \quad (2.18)$$

где A_0 – начальная площадь поперечного сечения образца;

A_1 – площадь поперечного сечения в наиболее тонком месте шейки в районе разрыва.

К пластическим материалам относят материалы, в которых относительное остаточное удлинение после разрыва $\delta > 5\%$, к хрупким – материалы с $\delta < 5\%$.

Диаграмма растяжения хрупких материалов приведена на рисунке 2.11. Для них отклонение от закона Гука начинается с малых значений растягивающей силы. Диаграмма не имеет площадки текучести. Образцы разрушаются при довольно малой остаточной деформации без образования шейки.

Испытания на сжатие. На сжатие исследуются образцы в виде коротких цилиндров высотой $h \leq 3d$, или кубиков.

Диаграмма сжатия образца из пластичного материала приведена на рисунке 2.12. В начале диаграмма сжатия практически совпадает с диаграммой растяжения (линии $OABC$). После точки D поперечное сечение образца увеличивается, и сжимающая сила быстро возрастает.

Для малоуглеродистой стали механические характеристики (предел пропорциональности, упругости, текучести, модуль упругости I рода) совпадают.

Диаграмма сжатия образца из хрупкого материала приведена на рисунке 2.13.

Как и при растяжении, диаграмма не имеет прямолинейного участка и площадки текучести. Однако, предел прочности при сжатии значительно выше, чем при растяжении. Для чугуна, например, предел прочности при

сжатии в 3...4,5 раз выше, чем при растяжении. Хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем при растяжении.

Разрушение образца начинается с появления трещин, которые направлены под углом 45° к его продольной оси.

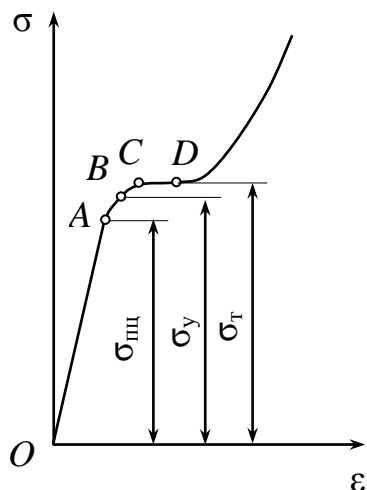


Рисунок 2.12 – Диаграмма напряжений малоуглеродистой стали при сжатии

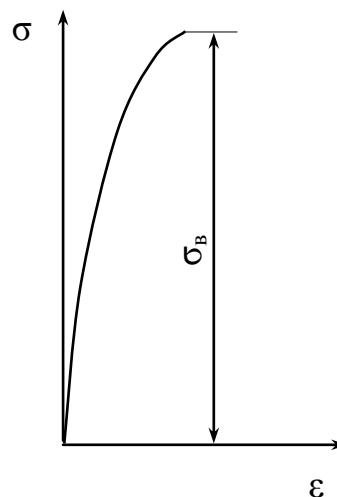


Рисунок 2.13 – Диаграмма напряжений чугуна при сжатии

Представление о свойствах малоуглеродистой стали и серого чугуна при растяжении и сжатии дают диаграммы на рисунку 2.14.

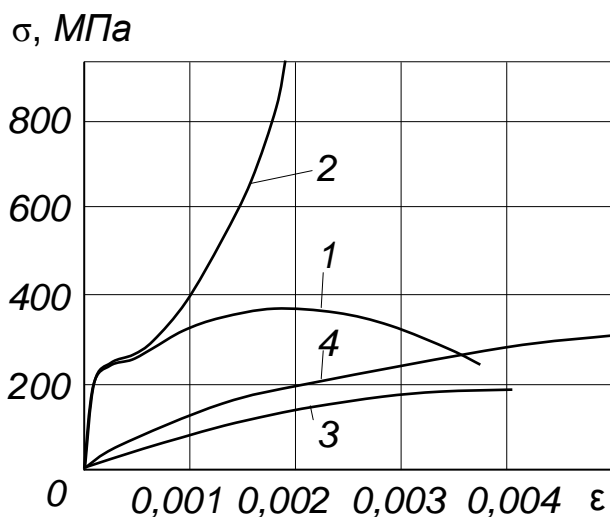


Рисунок 2.14 – Диаграммы напряжений: 1,2 – малоуглеродистые стали соответственно при растяжении и сжатии; 3,4 – серый чугун соответственно при растяжении и сжатии

Определение твердости. Под твердостью понимают способность материала противодействовать проникновению в него других тел.

Наибольшее распространение имеют испытания твердости по Бринеллю и Роквеллу. Сущность испытаний состоит во вдавливании под определенной нагрузкой закаленного шарика (при испытаниях по Роквеллу) в исследуемый материал.

Величина, которая характеризует твердость, или число твердости по Бринеллю (HB) определяется по формуле

$$HB = \frac{F}{10A_{от}}, \quad (2.19)$$

где F – нагрузка на шарик диаметром 10 мм, Н;
 $A_{от}$ – площадь поверхности сферического оттиска, мм².

Твердость, определяемая различными методами, с помощью специальных таблиц может быть приведена к твердости по Бринеллю.

Между твердостью и другими механическими характеристиками (пределами текучести, прочности) существует корреляционная зависимость. Например, для стали $\sigma_B \cong 0,36HB$, для серого чугуна $\sigma_B \cong 0,17(HB - 10)$.

Испытания на твердость более просты, чем опыты на растяжение или сжатие, так как здесь не нужно мощных разрывных машин и специальных образцов. Испытаниям можно подвергать непосредственно детали изделий. Поэтому в некоторых случаях (особенно на производстве) испытания на твердость используют для оценки величины предела прочности.

2.5 Допускаемые напряжения при растяжении (сжатии)

Для пластичных материалов за величину опасных напряжений принимают предел текучести:

$$\sigma_{пред} = \sigma_T.$$

Допускаемые напряжения для пластичных материалов определяются по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]}, \quad (2.20)$$

где $[n_T]$ – коэффициент запаса по пределу текучести; как правило, $[n_T] = 1,5 \dots 2,5$.

Для хрупких материалов за величину опасных напряжений принимают предел прочности:

$$\sigma_{пред} = \sigma_B.$$

Допускаемые напряжения для хрупких материалов определяют по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{[n_B]}, \quad (2.21)$$

где $[n_B]$ – коэффициент запаса по пределу прочности; как правило, $[n_B] = 2,5 \dots 5$.

2.6 Пример расчета стержня на растяжение

Стальной стержень (рисунок 2.15) находится под действием силы F и собственного веса. Площадь поперечных сечений участков стержня A и $2A$.

Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; удельный вес стали $\gamma = 77$ кН/м³. Числовые значения величин: $a = 2$ м; $b = 4,5$ м; $c = 1$ м; $F = 1,4$ кН; $A = 16$ см².

Необходимо:

1. Начертить стержень в масштабе.
2. Написать для каждого участка аналитические выражения продольных сил N и нормальных напряжений σ от текущей координаты z .
3. Построить эпюры N и σ .
4. Определить перемещение нижнего конца стержня.

Решение *

Схема стержня в масштабе приведена на рисунке 2.15, а.

Масштаб необходимо соблюсти только для вертикальных размеров стержня вдоль оси z .

Аналитические выражения для продольных сил N и нормальных напряжений σ .

Направим ось z вдоль продольной оси стержня. Начало координат примем на свободном конце стержня.

Разобьем стержень на три участка: AB , BC и CD .

Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние нагрузки или изменяются размеры сечений стержня.

Методом сечений определим внутренние продольные силы на участках стержня.

Участок AB . Для сечения с координатой z_1 ($0 \leq z_1 \leq c = 1$ м) продольная сила равняется:

$$N_1 = \gamma A z_1;$$

На стержень ниже сечения z_1 действует только вес $\gamma A z_1$ части участка AB стержня длиной z_1 .

Нормальное напряжение

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{\gamma A z_1}{A} = \gamma z_1 ;$$

* Дополнительные пояснения и методические указания приведены курсивом.

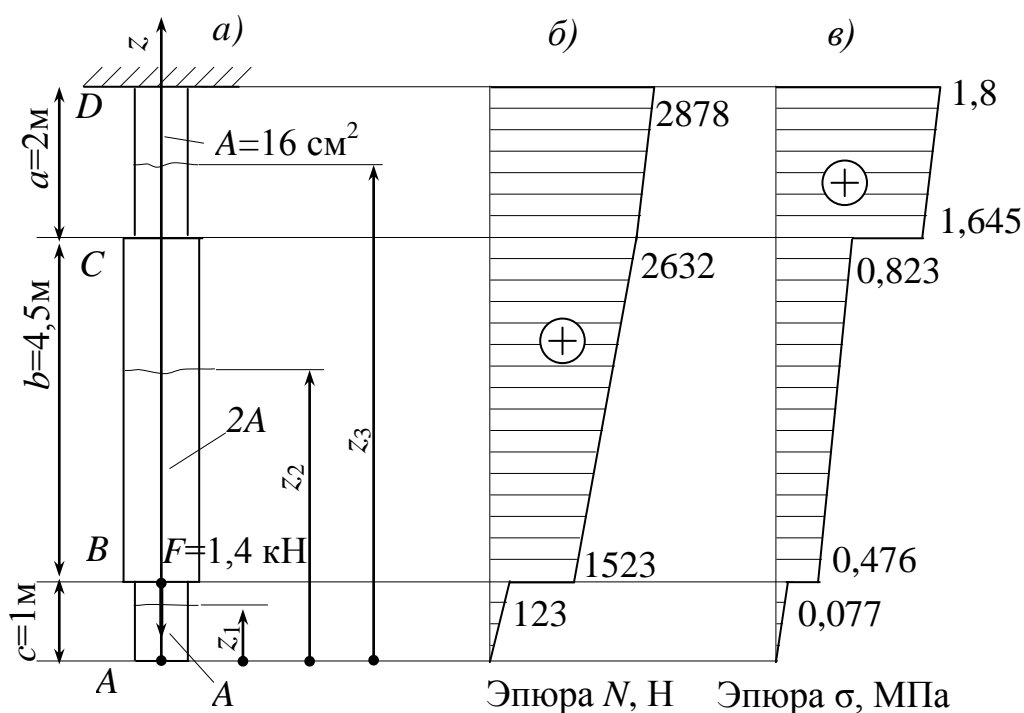


Рисунок 2.15 – Расчетная схема стержня, эпюры продольных усилий и нормальных напряжений

Аналитические выражения продольной силы N_1 и нормальных напряжений σ_1 представляют собой уравнения прямых. Для их построения определяют значения N_1 и σ_1 на границах участков.

$$\text{При } z_1 = 0 \text{ (сечение } A) \quad N_A = 0; \quad \sigma_A = 0.$$

$$\text{При } z_1 = 1 \text{ м (сечение } B) \quad N_B = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 123 \text{ Н.}$$

Здесь 10^3 и 10^{-4} – переводные коэффициенты для перевода соответственно кН/м^3 в Н/м^3 и см^2 в м^2 .

$$\sigma_B = 77 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^3 = 0,077 \text{ МПа. Заметим, что } 1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2.$$

Здесь 10^{-6} и 10^3 – переводные коэффициенты для перевода соответственно кН/м^3 в Н/мм^3 и м в мм.

Участок BC. Для сечения с координатой z_2 ($1 \text{ м} \leq z_2 \leq 5,5 \text{ м}$) продольная сила N_2 и нормальные напряжения σ_2 :

$$N_2 = \gamma A c + F + \gamma 2A(z_2 - c); \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A};$$

$$\text{При } z_2 = c = 1 \text{ м (сечение } B) \quad N_B = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 + 1,4 \cdot 10^3 = 1523 \text{ Н.}$$

$$\sigma_B = \frac{1523}{2 \cdot 16 \cdot 10^2} = 0,476 \text{ МПа.}$$

При $z_2 = 5,5$ м (сечение C)

$$N_C = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 + 1,4 \cdot 10^3 + 77 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-4} (5,5 - 1) = 2632 \text{ Н;}$$

$$\sigma_C = \frac{2632}{2 \cdot 16 \cdot 10^2} = 0,823 \text{ МПа.}$$

Участок CD . Для сечения с координатой z_3 ($5,5 \text{ м} \leq z_3 \leq 7,5 \text{ м}$) продольная сила N_3 и нормальное напряжение σ_3 :

$$N_3 = \gamma A c + F + \gamma 2 A b + \gamma A (z_3 - e - c); \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A}.$$

При $z_3 = 5,5$ м (сечение C)

$$N_C = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 + 1,4 \cdot 10^3 + 77 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 4,5 = 2632 \text{ Н;}$$

$$\sigma_C = \frac{2632}{16 \cdot 10^2} = 1,645 \text{ МПа.}$$

При $z_3 = 7,5$ м (сечение D)

$$N_D = 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1 + 1,4 \cdot 10^3 + 77 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 4,5 + 77 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4} (7,5 - 4,5 - 1) = 2878 \text{ Н;}$$

$$\sigma_D = \frac{2878}{16 \cdot 10^2} = 1,8 \text{ МПа.}$$

Построение эпюр продольных сил и нормальных напряжений.

По числовым значениям на границах участков стержня строим эпюру продольных сил N (рисунок 2.15, б) и нормальных напряжений σ (рисунок 2.15, в).

Перемещение нижнего конца стержня равняется удлинению от действия силы F и собственного веса:

$$\delta = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD},$$

где Δl_{AB} , Δl_{BC} , Δl_{CD} – удлинение участков стержня.

Удлинение участков стержня:

$$\Delta l_{AB} = \frac{(N_A + N_B) c}{2EA};$$

$$\Delta l_{AB} = \frac{(0 + 123) \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 1,92 \cdot 10^{-7} \text{ м;}$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{(N_B + N_C)b}{2E \cdot 2A};$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{(1523 + 2632) \cdot 4,5}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{(N_C + N_D)c}{2EA};$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{(2632 + 2878) \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\delta = 1,92 \cdot 10^{-7} + 1,46 \cdot 10^{-5} + 1,72 \cdot 10^{-5} = 3,20 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,032 \text{ мм}.$$

2.7 Расчет статически неопределимых систем на растяжение (сжатие)

Инженерные конструкции в зависимости от метода расчета усилий в элементах разделяют на статически определимые и статически неопределимые. В статически определимых конструкциях внутренние усилия в их элементах могут быть определены из уравнений статики.

В статически неопределимых конструкциях неизвестных усилий больше, чем уравнений статики. Поэтому статические уравнения дополняют уравнениями, учитывающими условия деформации конструкций.

Рассмотрим расчет статически неопределимых конструкций на примере стального стержня постоянного поперечного сечения с площадью A и длиной l с заземленными обоими концами и нагруженного продольной силой F (рисунок 2.16). Построим эпюру продольных сил в этом стержне.

Под действием силы F в заземлениях стержня возникают реакции R_A и R_B .

Из условий равновесия (суммы проекций сил на продольную ось) имеем:

$$F = R_A + R_B. \quad (2 **)$$

Для определения двух неизвестных (R_A и R_B) нужно составить еще одно уравнение. Для этого отбросим заземление и заменим его действие силой R_B .

От действия силы F удлинение участка длиной a будет $\frac{Fa}{EA}$, а от действия силы R_B удлинение всего стержня уменьшится на величину $\frac{R_B l}{EA}$ (см. формулу 2.10).

В действительности оба конца стержня заземлены и его длина не изменяется, т.е. удлинение от силы F равняется укорочению от силы R_B :

$$\frac{Fa}{EA} = \frac{R_B l}{EA}.$$

Отсюда опорная реакция:

$$R_B = F \frac{a}{l}.$$

Из уравнения (2**) определим вторую опорную реакцию:

$$R_A = F - R_B = F \frac{b}{l}.$$

После определения реакций расчет внутренних усилий проводится так же, как и для статически определимого стержня. Эпюра продольных сил показана на рисунке 2.16, б).

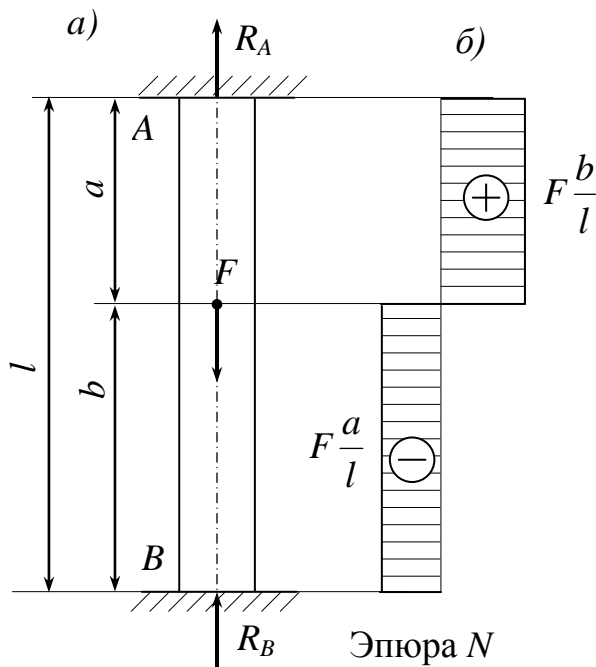


Рисунок 2.16 – Статически неопределимая система: а – расчетная схема; б – эпюра продольных сил

3 СДВИГ

3.1 Понятие о сдвиге

Сдвиг – вид сопротивления стержня, когда в его поперечных сечениях возникает только поперечная сила.

Деформация сдвига в металлах называется срезом, в камне и дереве – скалыванием.

Сдвиг вызывается действием на стержень двух равных противоположно направленных поперечных сил, расположенных на малом расстоянии одна от другой (рисунок 3.1).

Деформации сдвига испытывают заклепки, болты, установленные без зазора, шпонки, швы сварных соединений, прутки и листы при резании их ножницами.

Сдвиг в чистом виде получить тяжело, так как он сопровождается другими видами деформаций (как правило, изгибом). Однако в расчетах встречаются случаи нагружения, когда на четырех гранях элементарного прямоугольного элемента, выделенного вокруг некоторой точки сечения стержня, действуют только касательные напряжения. Такой вид деформации называют чистым сдвигом.

Примером деформации чистого сдвига является кручение тонкостенной трубы (рисунок 3.2). При кручении ее образующие наклоняются из-за относительного поворота поперечных сечений стержня, а стенки трубы испытывают деформацию сдвига.

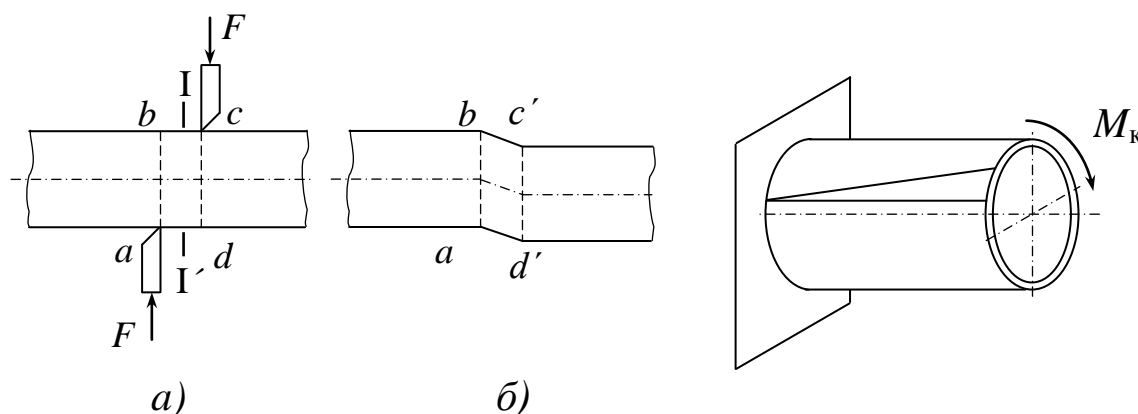


Рисунок 3.1 – Разрезание бруса:
a – расчетная схема; *б* – деформированное состояние бруса

Рисунок 3.2 – Чистый сдвиг при кручении тонкостенной трубы

3.2 Касательные напряжения. Условие прочности

На участке бруса между силами F в произвольном сечении I – I' (см. рисунок 3.1, а) действует поперечная сила Q , которая определяется по методу сечений и равняется

$$Q = F. \quad (3.1)$$

Поперечная сила Q является равнодействующей элементарных касательных сил τdA , которые действуют в поперечном сечении (см. формулу (1.4)). Для определения касательных напряжений по известному значению поперечной силы необходимо знать закон их распределения по сечению стержня.

Обычно принимается, что напряжения распределяются равномерно. Тогда после интегрирования из (1.4) получим формулу для определения касательных напряжений:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}, \quad (3.2)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

При сдвиге заклепок, болтов, шпонок и других деталей кроме касательных напряжений в сечениях из-за изгиба возникают нормальные напряжения. Однако, если нормальные напряжения значительно меньше касательных, то в приближенных расчетах учитывают только касательные напряжения и расчет проводят как для случая чистого сдвига.

Условие прочности при сдвиге:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau_c], \quad (3.3)$$

где $[\tau_c]$ – допускаемое напряжение материала на сдвиг.

Обычно допускаемое напряжение на сдвиг принимается как часть допускаемого напряжения на растяжение:

- для пластичных материалов $[\tau_c] = (0,5 \dots 0,6) [\sigma]$;
- для хрупких материалов $[\tau_c] = (0,7 \dots 1,0) [\sigma]$.

4 КРУЧЕНИЕ

4.1 Крутящий момент. Эпюры крутящих моментов

Кручение – сопротивление стержня, когда в поперечных сечениях стержня от внешней нагрузки возникают только крутящие моменты (другие внутренние силовые факторы отсутствуют).

Стержень, работающий на кручение, называют валом.

Кручение испытывают валы двигателей, станков, приводов машин, элементы пространственных стержневых конструкций.

Кручение вызывается действием внешних моментов, которые лежат в плоскости, перпендикулярной продольной оси стержня. Такие моменты будем называть вращающими моментами и обозначать буквой T .

Внутренние силовые факторы (крутящие моменты) в поперечных сечениях стержня определяются по методу сечений (см. формулы (1.2)).

Установим правила для определения крутящих моментов в стержнях, нагруженных внешними вращающими моментами.

Рассмотрим кручение вала двумя вращающими моментами T , приложенными на его торцах (рисунок 4.1, *а*).

Определим внутренний крутящий момент в произвольно выбранном поперечном сечении I – I. Мысленно разрежем вал этим сечением на две части и отбросим правую часть вала (рисунок 4.1, *б*). Действие отброшенной части заменим действием внутреннего крутящего момента M_k . Из условия равновесия левой части вала находим :

$$M_k = T. \quad (4.1)$$

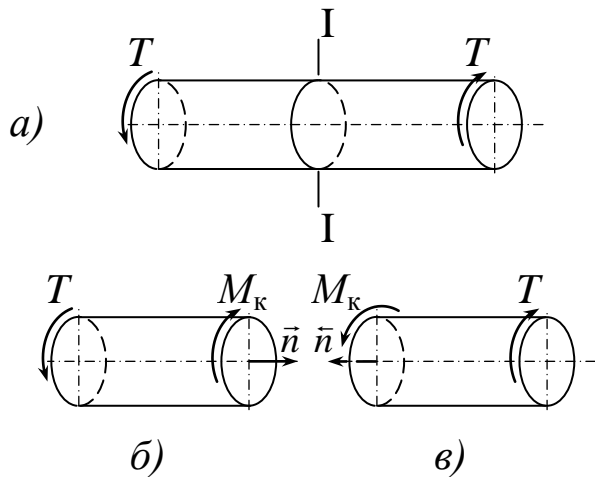


Рисунок 4.1 – Кручение вала:
а – нагружение внешними вращающими моментами T ;
б, *в* – внутренние крутящие моменты M_k соответственно для левой и правой части вала

В сечении отброшенной части рассматриваемого вала в соответствии с третьим законом Ньютона действует тот же внутренний крутящий момент M_k , но противоположного направления. Отброшенная часть вала также уравновешена (рисунок 4.1, *в*).

В общем случае, когда на вал действует произвольное число внешних крутящих моментов, формула (4.1) для определения внутреннего крутящего момента в поперечном сечении вала приводится к виду:

$$M_k = \sum T_i, \quad (4.2)$$

где $\sum T_i$ – алгебраическая сумма внешних крутящих моментов, приложенных к валу по одну сторону сечения.

Внутренний крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала равняется алгебраической сумме внешних вращающих моментов, приложенных по одну сторону от сечения.

Знак крутящего момента не имеет физического смысла. Но для однозначности построения эпюр крутящих моментов будем придерживаться следующего правила знаков. В формуле (4.2) внешний крутящий момент берется со знаком “+”, если при взгляде на отсеченную часть вала со стороны внешней нормали \vec{n} он направлен против хода часовой стрелки (рисунок 4.1, б, в), и со знаком “-” – когда крутящий момент направлен по ходу часовой стрелки.

Пример. Для вала постоянного поперечного сечения (рисунок 4.2), находящегося в равновесии под действием четырех крутящих моментов $T_1 = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_2 = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_3 = 900 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_4 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, построить эпюру крутящих моментов.

Рассмотрим три участка вала. Границами участков являются сечения, в которых приложены крутящие моменты.

Для поперечного сечения с координатой z_1 на участке 1 складывая вращающие моменты, приложенные по левую сторону сечения, определим по формуле (4.2) крутящий момент:

$$M_{к1} = -T_1 = -400 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Крутящий момент $M_{к1}$ не зависит от координаты z_1 , то есть в пределах участка 1 :

$$M_{к1} = \text{const} .$$

Аналогично для участков 2 и 3:

$$M_{к2} = -T_1 - T_2 = -400 - 200 = -600 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{к3} = -T_1 - T_2 + T_3 = -400 - 200 + 900 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рисунке 4.2, б.

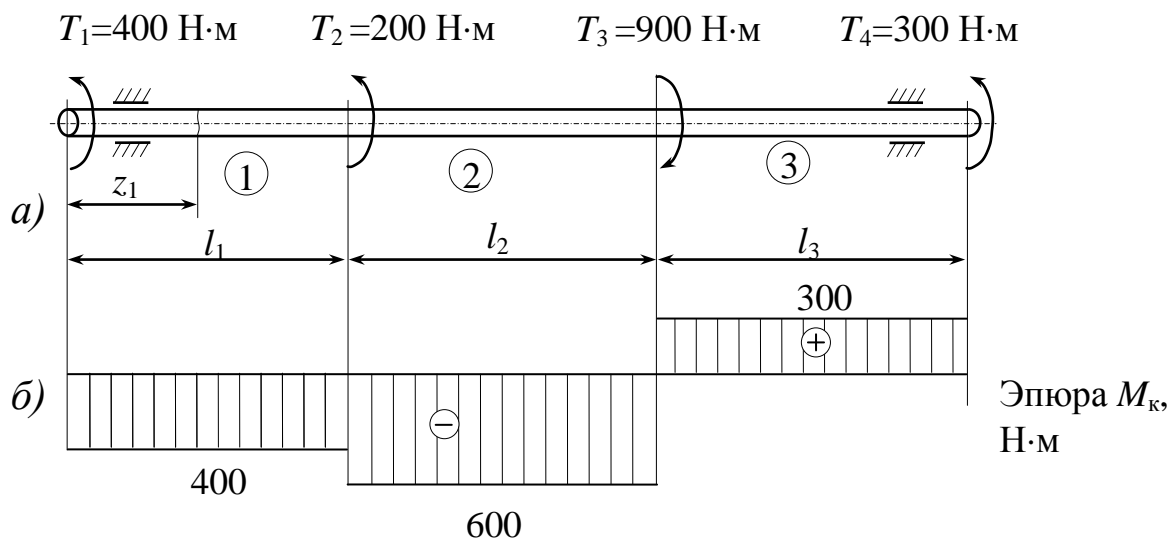


Рисунок 4.2 – Расчетная схема вала (а) и эпюра крутящих моментов (б)

4.2 Касательные напряжения

Для определения напряжений по известному крутящему моменту рассмотрим кручение вала круглого поперечного сечения, изготовленного для большей наглядности из резины. На боковую поверхность вала нанесена прямоугольная сетка из прямых, параллельных продольной оси, и окружностей, которые представляют собой внешние контуры поперечных сечений (рисунок 4.3).

При действии крутящих моментов продольная ось вала остается прямолинейной, поперечные сечения (круги) не искривляются и расстояния между ними не изменяются, сечения вращаются относительно продольной оси.

Рассмотрим вал, жестко закрепленный одним концом (рисунок 4.3).

Под действием вращающего момента T , приложенного на свободном конце вала, сечения повернутся на некоторые углы по отношению к своему начальному положению или, что то же самое, по отношению к неподвижному сечению (защемлению).

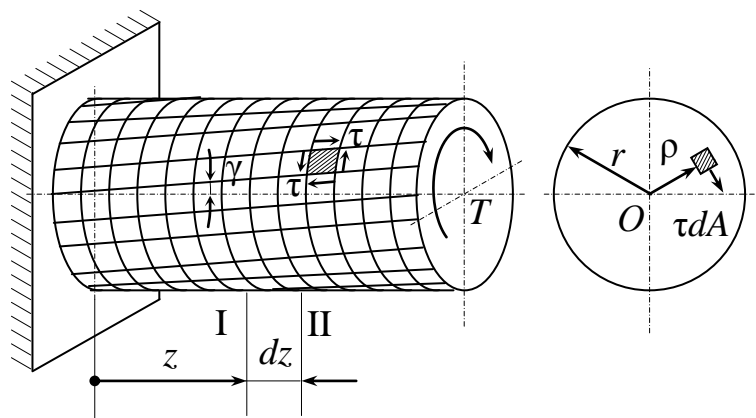


Рисунок 4.3 – Деформация вала при кручении

Для произвольного сечения I с координатой z угол поворота будет составлять φ_z , а для сечения II с координатой $z + dz$: $\varphi_z + d\varphi$.

Угол $d\varphi$ представляет собой угол поворота сечения II относительно сечения I, или угол закручивания элемента вала dz .

Крутящий момент во всех поперечных сечениях вала:

$$M_k = T.$$

Выразим его через касательные напряжения, которые возникают в сечении.

Касательное напряжение в каждой точке сечения направлено перпендикулярно радиусу. Это вытекает из характера деформации: при повороте сечения его точки перемещаются по концентрическим окружностям, т.е. направление перемещений точек и направление возникающих в них

касательных напряжений перпендикулярны соответствующему радиусу (рисунок 4.3).

Момент элементарной силы τdA относительно продольной оси (точка O) равняется:

$$dM_k = (\tau dA)\rho. \quad (4.3)$$

Интегрируя выражение (4.3) по площади сечения A , получим зависимость, которая связывает крутящий момент и касательные напряжения:

$$M_k = \int_A \tau \rho dA. \quad (4.4)$$

Для определения закона распределения касательных напряжений выделим часть вала длиной dz между сечениями I и II и с радиусом ρ ($0 \leq \rho \leq r$, где r – радиус вала, см. рисунок 4.3). Примем, что выделенная часть в сечении I закреплена.

Затем из части вала dz выделим сектор кольца с произвольным центральным углом ψ радиусом ρ и толщиной $d\rho$ (рисунок 4.4).

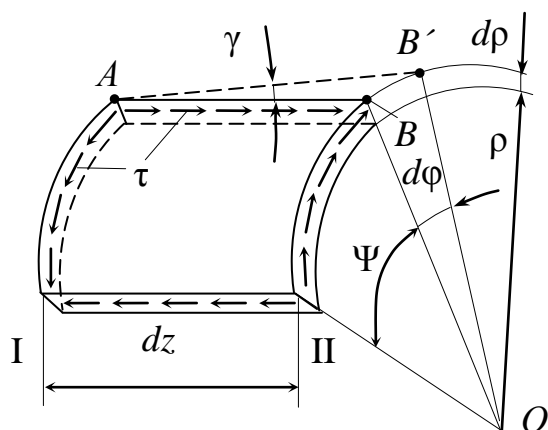


Рисунок 4.4 – Деформация элемента вала при кручении

Точка B сечения II при его повороте на угол $d\phi$ перейдет из положения B в положение B' . Из треугольника ABB' абсолютное перемещение точки B равняется:

$$BB' = dz \operatorname{tg} \gamma.$$

Из-за малости деформаций $\operatorname{tg} \gamma = \gamma$ (здесь γ – угловая деформация). Тогда:

$$BB' = dz \gamma.$$

Аналогично из треугольника OBB' :

$$BB' = \rho d\phi.$$

Из двух последних выражений, приравнивая их правые части, получим значение угловой деформации:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz} . \quad (4.5)$$

Согласно закону Гука для сдвига ($\tau = \gamma G$) находим значение касательного напряжения:

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dz} . \quad (4.6)$$

Подставив (4.6) в (4.4), получим:

$$M_{\kappa} = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA .$$

Обозначим:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA . \quad (4.7)$$

Величина J_p называется полярным моментом инерции сечения.

С учетом (4.7):

$$M_{\kappa} = GJ_p \frac{d\varphi}{dz} ,$$

или

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} . \quad (4.8)$$

Подставив (4.8) в (4.6), получим формулу распределения касательных напряжений по сечению вала:

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{J_p} \rho . \quad (4.9)$$

Из формулы (4.9) следует, что касательные напряжения изменяются вдоль любого радиуса по линейному закону и в точках, равноотстоящих от центра сечения, одинаковы. Эпюры распределения касательных напряжений в круговых и кольцевых сечениях вала показаны на рисунке 4.5.

Наибольшего значения касательное напряжение достигает при $\rho = \rho_{\max} = r$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{J_p} \rho_{\max} .$$

Обозначим:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}} . \quad (4.10)$$

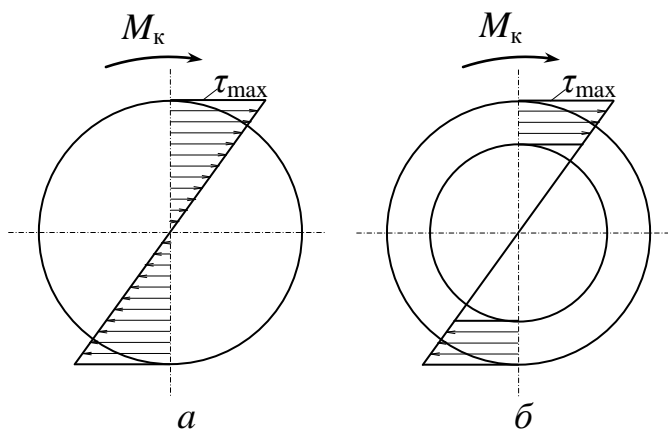


Рисунок 4.5 – Эпюры касательных напряжений в круговом (а) и кольцевом (б) поперечных сечениях

Величина W_p называется полярным моментом сопротивления сечения. С учетом (4.10):

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}. \quad (4.11)$$

4.3 Геометрические характеристики сечений

Полярный момент инерции. Рассмотрим круглое кольцевое сечение вала с внешним диаметром D и внутренним d (рисунок 4.6).

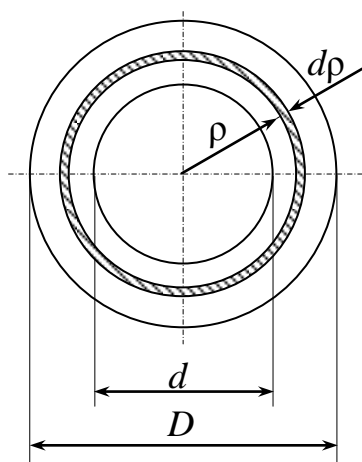


Рисунок 4.6 – Кольцевое сечение вала

Выделим элементарное кольцо с радиусом ρ и шириной $d\rho$. Площадь элементарного кольца:

$$dA = 2\pi\rho d\rho.$$

Подставив это значение в (4.7) и интегрируя по площади сечения (от $d/2$ до $D/2$), получим:

$$J_p = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_{d/2}^{D/2} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4).$$

Или:
$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \quad (4.12)$$

Для круга $d = 0$, поэтому:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (4.13)$$

Полярный момент сопротивления получим по формуле (4.10), поделив значение полярного момента инерции на максимальный радиус сечения $\rho_{\max} = D/2$:

$$W_p = \frac{(\pi D^4 / 32)(1 - d^4 / D^4)}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

Аналогично для круга:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Единицы измерения полярного момента инерции $J_p - \text{м}^4$, полярного момента сопротивления $W_p - \text{м}^3$.

4.4 Условие прочности

Прочность вала при кручении считают обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения τ_{\max} в опасном сечении не превышают допускаемых напряжений $[\tau_k]$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = [\tau_k], \quad (4.14)$$

где M_k – крутящий момент в опасном сечении вала; опасное (наиболее нагруженное) сечение вала определяется по эпюре крутящих моментов; $[\tau_k]$ – допускаемое напряжение при кручении.

Для валов с переменными сечениями условие (4.14) должно выполняться для всех участков.

Допускаемое напряжение определяется по результатам испытаний на кручение. Механические характеристики материалов взаимосвязаны и, при необходимости, ориентировочно допускаемое касательное напряжение может быть определено из эмпирических зависимостей:

– для стали : $[\tau_k] \approx (0,55 \dots 0,6) [\sigma_p]$;

– для чугуна : $[\tau_k] \approx (1,0 \dots 1,2) [\sigma_p]$,

где $[\sigma_p]$ – допускаемое нормальное напряжение при растяжении.

Кроме проверочного расчета из условия (4.14) можно определить:

– полярный момент сопротивления или диаметр вала (необходимые при проектном расчете) :

$$W_p \geq \frac{M_k}{[\tau_k]}; \quad (4.15)$$

$$D^* \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau_k]}} \quad (4.16)$$

– допускаемый крутящий момент при заданных размерах поперечного сечения и материале вала :

$$[M_k] = [\tau_k] W_p. \quad (4.17)$$

4.5 Деформации при кручении. Условие жесткости

При кручении происходит поворот сечений вала относительно друг друга.

Угол относительного поворота двух сечений, отдаленных на расстоянии l (или, что то же самое, угол закручивания участка вала длиной l) можно определить из выражения (4.8), выполнив интегрирование по длине участка l :

$$\varphi = \int_l \frac{M_k}{GJ_p} dz. \quad (4.18)$$

Для случая, когда в пределах участка $M_k = \text{const}$ и $J_p = \text{const}$, после интегрирования правой части, получим:

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p}. \quad (4.19)$$

Единица измерения угла закручивания φ в системе СИ – радианы.

Произведение GJ_p называется жесткостью вала на кручение.

В некоторых случаях вал должен удовлетворять не только условиям прочности, но и жесткости на кручение. Например, деформация кручения ходовых винтов токарных станков приводит к увеличению погрешности при нарезании резьбы. Поэтому их деформации кручения ограничиваются.

Жесткость при кручении, как обычно, характеризуют относительным (или погонным) углом закручивания θ , который определяется из выражения:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (4.20)$$

Или с учетом (4.19) условие жесткости приобретает вид:

* формула (4.16) получена для круглого сплошного сечения.

$$\theta = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} \leq [\theta]. \quad (4.21)$$

где $[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

Кроме проверки на жесткость, из выражения (4.21) можно определить:

– момент инерции сечения или диаметр вала:

$$J_p \geq \frac{M_{\kappa}}{G[\theta]}; \quad (4.22)$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\kappa}}{G[\theta]}}. \quad (4.23)$$

– допускаемый крутящий момент при заданных размерах и материале вала:

$$[M_{\kappa}] = [\theta]GJ_p. \quad (4.24)$$

– подобрать материал вала при заданных других величинах:

$$G = \frac{M_{\kappa}}{\theta J_p}. \quad (4.25)$$

При проектном расчете диаметр вала должен одновременно удовлетворять условиям (4.16) и (4.23). Поэтому в качестве окончательного размера должно быть принято большее значение диаметра, которое удовлетворяет обоим этим условиям.

5 ИЗГИБ

5.1 Основные понятия

Под *изгибом* понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты. Наряду с изгибающими моментами при изгибе в большинстве случаев возникают и поперечные силы.

Чистый изгиб – деформация, при которой в поперечных сечениях стержня действует только изгибающий момент.

Поперечный изгиб – деформация, при которой в поперечных сечениях стержня действуют одновременно изгибающие моменты и поперечные силы.

Если внешняя нагрузка расположена в плоскости, которая проходит через одну из главных центральных осей инерции этого сечения (в частности – ось симметрии), то балка деформируется в этой же плоскости. Такой изгиб называют *прямым или плоским*.

На рисунке 5.1 изображен брус, подвергнутый прямому изгибу. Изгиб вызывается действием сил и моментов, которые лежат в силовой плоскости Π , проходящей через продольную ось балки. Далее, если не обусловливается особо, будет рассматриваться прямой изгиб в плоскости yOz . В условиях изгиба работают валы зубчатых передач, элементы мостов и мостовых перекрытий, рельсы железнодорожного пути, хребтовые балки вагонов, оси колесных пар, и т.п.

Стержень, который работает на изгиб, называют *балкой*.

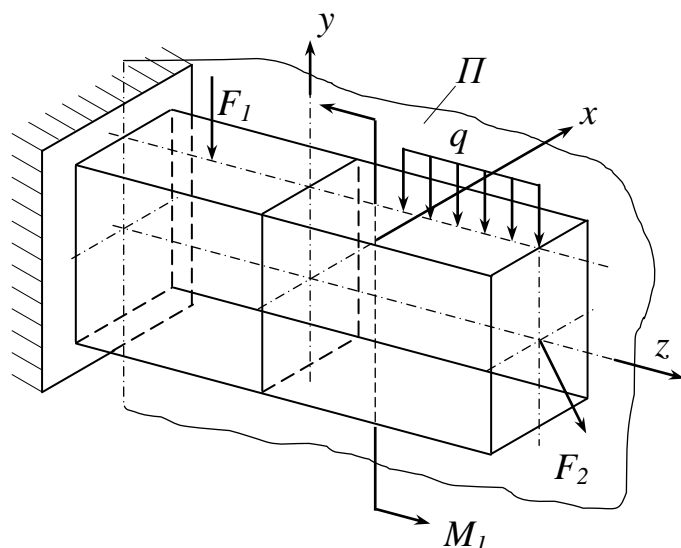


Рисунок 5.1 – Прямой изгиб бруса

5.2 Типы опор балок. Типы балок

Конструктивное изготовление опор балок довольно разнообразное. В сопротивлении материалов все конструктивное разнообразие опор сводят к трем основным типам: шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная и защемляющая опоры.

Шарнирно подвижная опора (рисунок 5.2, а) допускает поворот балки относительно опоры, и перемещение в одном направлении (на рисунке 5.2, а это направление перпендикулярно опорному стержню). Реакция R такой опоры направлена вдоль опорной связи (шарнирного опорного стержня) перпендикулярно направлению допускаемых перемещений.

Шарнирно-неподвижная опора (рисунок 5.2, б) допускает свободный поворот балки относительно опоры, но не допускает ни вертикального, ни горизонтального перемещения. В опоре возникает сила реакции, направление которой зависит от внешних сил, действующих на балку. Для удобства определения ее обычно заменяют проекциями R_A и H_A на оси координат.

Защемление (рисунок 5.2, в) не допускает ни поворота, ни линейных перемещений балки. Реакция защемления состоит из силы, которую обычно заменяют составляющими R_A и H_A , и момента M_A .

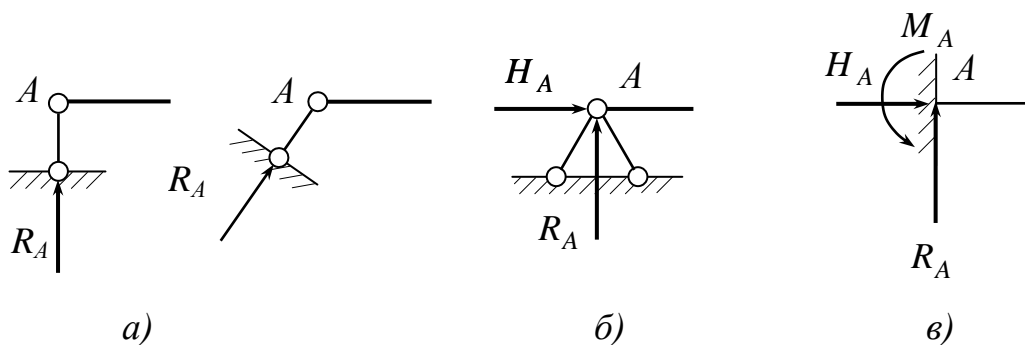


Рисунок 5.2 – Типы опор балок: *a* – шарнирно-подвижная опора; *б* – шарнирно-неподвижная опора; *в* – защемляющая опора

В зависимости от количества и типа опор, соединяющих балки с основанием, выделяют следующие типы балок:

1. Простая (однопролетная или двухопорная) балка (рисунок 5.3, *a*). Балка имеет одну шарнирно-неподвижную и одну шарнирно-подвижную опору.

Расстояние l между опорами балки называется *пролетом*.

2. Простая балка с одной или с двумя консолями (рисунок 5.3, *б*, *в*). Свешивающиеся части (*BC* на рисунке 5.3, *б* и *CA* и *BD* на рисунке 5.3, *в*) называются *консолями*.

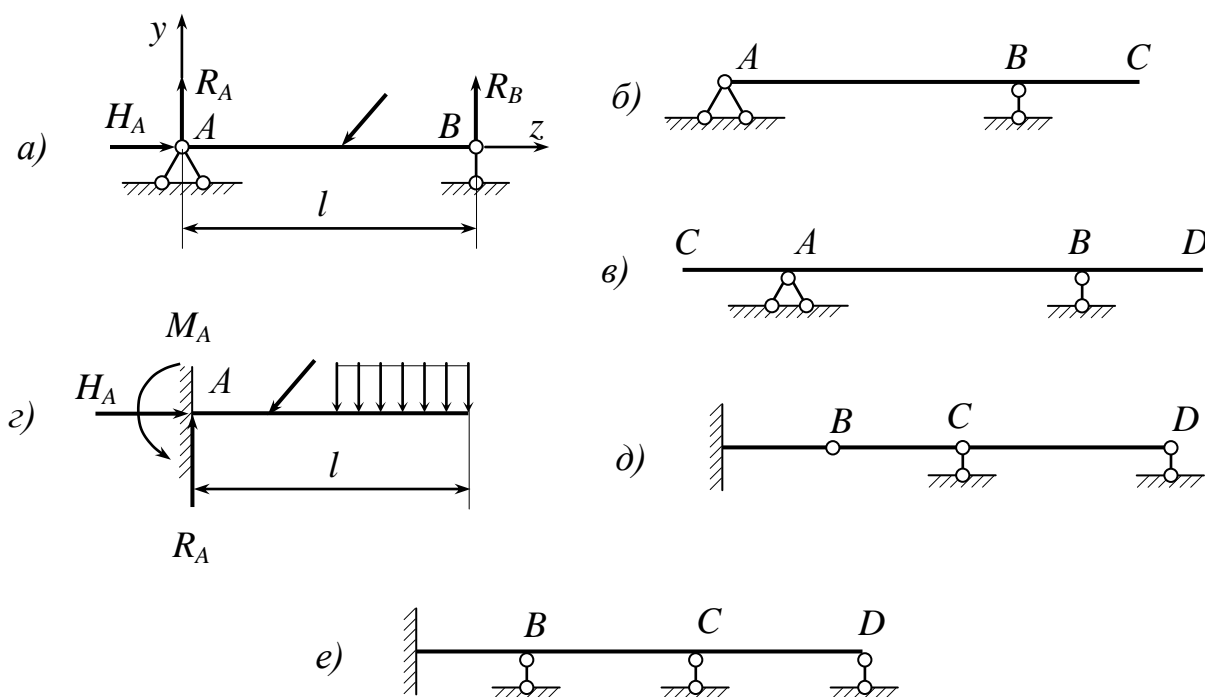


Рисунок 5.3 – Типы балок: *a* – простая балка; *б* – простая балка с одной консолью; *в* – простая балка с двумя консолями; *г* – консольная балка; *д* – шарнирная балка; *е* – неразрезная балка

3. Консольная балка (рисунок 5.3, *г*). Она имеет одну заземляющую опору. Длина балки l называется *вылетом*.

4. Шарнирная балка (рисунок 5.3, *д*). Образовывается присоединением к простой или консольной балке дополнительных участков с помощью шарниров и шарнирно-подвижных опор. При этом число дополнительных шарниров должно равняться числу дополнительных опор. На рисунке 5.3, *д* таковыми являются шарниры B, C и опоры C, D .

5. Неразрезная балка (рисунок 5.3, *д*). Образовывается присоединением к простой или консольной балке дополнительных шарнирно-подвижных опор. Шарниры в дополнительных опорах не перерезают балку, а только присоединяются к ней снизу.

Для определения опорных реакций в балках, нагруженных плоской системой сил, можно составить три независимых уравнения равновесия. В балках 1-3 неизвестных реакций также три. Поэтому эти балки статически определимые. Балка 4 (шарнирная) также статически определимая, так как число неизвестных реакций в дополнительных опорах равняется числу дополнительных уравнений равновесия, так как каждый промежуточный шарнир добавляет одно дополнительное уравнение: сумма моментов относительно шарнира от всех сил, расположенных по одну сторону от него, равняется нулю.

Балка 5 (неразрезная) статически неопределимая. Степень статической неопределимости равняется числу реакций в дополнительных опорах.

5.3 Определение опорных реакций в балках

Набор уравнений равновесия для определения опорных реакций должен быть рациональным: нужно избегать необходимости решать эти уравнения **совместно**.

Для простой двухопорной балки (см. рисунок 5.3, *а*) таковыми могут быть уравнения:

а) сумма проекций всех сил на продольную ось балки равняется нулю:

$$\sum F_i^z = 0,$$

откуда находят H_A .

б) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира A равняется нулю:

$$\sum M_i^A = 0,$$

откуда находят R_B .

в) сумма моментов всех сил относительно шарнира B равняется нулю:

$$\sum M_i^B = 0,$$

откуда находят R_A .

Для контроля следует использовать условие равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикаль:

$$\sum F_i^y = 0.$$

Для консольных балок при определении реакций рациональным является набор уравнений в виде одного уравнения суммы моментов и двух уравнений сумм проекций сил на оси y, z . Для контроля следует использовать уравнение суммы моментов относительно любой другой точки, кроме той, которая принималась при определении реакций.

Для шарнирных балок дополнительными уравнениями при определении реакций являются условия равенства нулю суммы моментов относительно шарниров, соединяющих отдельные части балки.

5.4 Внутренние силовые факторы при изгибе

Для определения внутренних усилий при изгибе рассмотрим простую двухопорную балку длиной l , загруженную в промежуточном сечении силой F (рисунок 5.4, а).

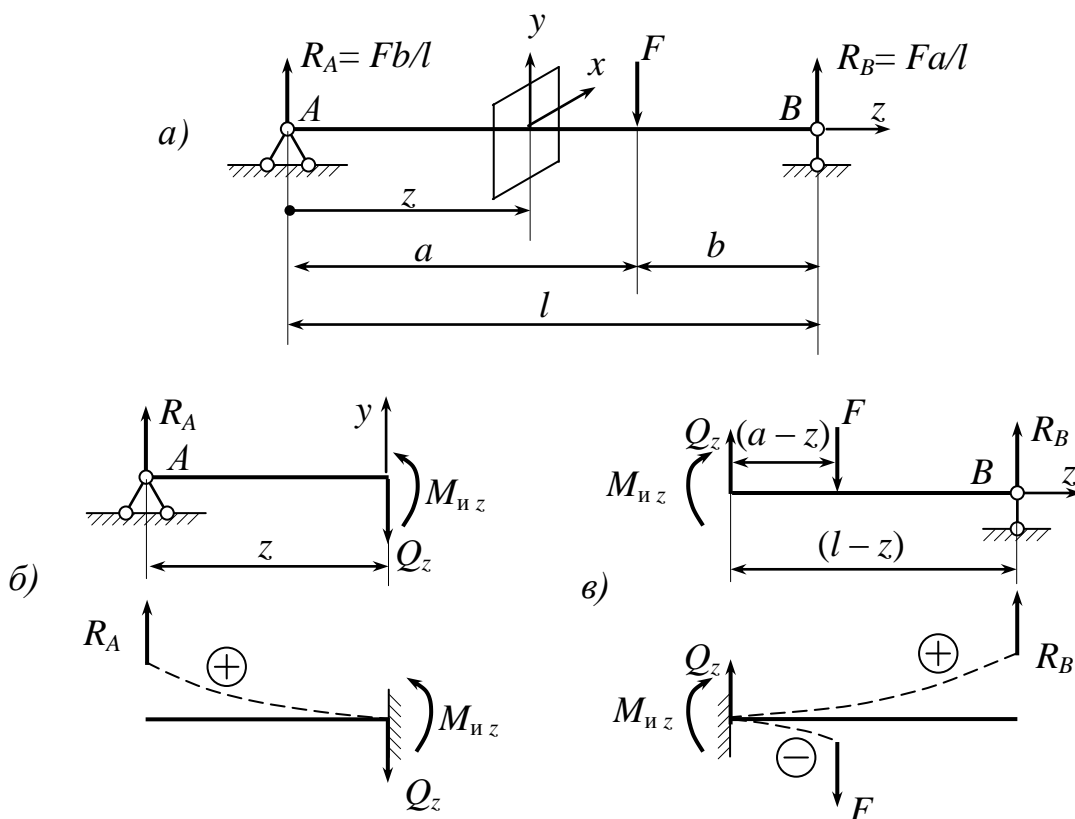


Рисунок 5.4 – Определение внутренних силовых факторов при изгибе:

a – расчетная схема балки; б, в – соответственно левая и правая части балки для сечения z

В опорах балки действуют реакции, которые определяются из условий равновесия балки. Из условий $\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$ определяем соответственно $R_B = Fa/l$; $R_A = Fb/l$.

Мысленно рассечем балку произвольным поперечным сечением с координатой z и отбросим правую часть балки. Действие отброшенной части заменим действием поперечной силы Q_z и изгибающего момента $M_{из}$ (другие внутренние силовые факторы отсутствуют, так как проекции внешних сил на оси x и z и моментов относительно осей y и z равняются нулю).

Из условий равновесия левой части балки (рисунок 5.4, б) (сумма проекций сил на ось y)

$$\sum F_y^{\text{лев}} = R_A - Q_z = 0$$

находим поперечную силу в сечении :

$$Q_z = R_A. \quad (5.1)$$

В общем случае, когда на балку действует произвольное число внешних усилий, формула (5.1) для определения поперечной силы Q_z в сечении z приобретает вид

$$Q_z = \sum F_i, \quad (5.2)$$

где $\sum F_i$ – алгебраическая сумма проекций внешних сил на ось y , приложенных к балке по одну сторону от сечения.

Поперечная сила Q в произвольном поперечном сечении балки равняется алгебраической сумме проекций внешних сил на ось y , приложенных по одну сторону от сечения.

Примем следующее правило знаков для поперечных сил : внешняя сила F_i входит в сумму в формуле (5.2) со знаком “+”, если она стремится повернуть рассматриваемую отсеченную часть относительно сечения, в котором определяется поперечная сила, по часовой стрелке.

Это правило универсальное, т.е. оно справедливо и для левой и для правой отсеченных частей балки.

Согласно этому правилу поперечная сила Q в сечении z для левой части на рисунке 5.4 положительна, так как сила R_A , которая вызывает эту силу, стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке, т.е. $Q_z = R_A = Fb/l$.

На правую часть балки действуют внешние силы: реакция R_B и сила F .

Для правой части балки имеем то же самое значение поперечной силы

$$Q = -R_B + F = -Fa/l + F = Fb/l.$$

Из суммы моментов внешних сил относительно центра тяжести сечения, приложенных к левой части балки

$$\sum M_i^{\text{лев}} = -R_A z + M_{из} = 0,$$

находим изгибающий момент :

$$M_{из} = R_A z = \frac{F b}{l} z. \quad (5.3)$$

При действии произвольного числа внешних сил и моментов формула (5.3) для определения изгибающего момента в сечении приводится к виду:

$$M_{из} = \sum M_i. \quad (5.4)$$

где $\sum M_i$ – алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно центра тяжести сечения, приложенных по одну сторону от сечения.

Изгибающий момент $M_{из}$ в произвольном сечении балки z равняется алгебраической сумме моментов внешних сил относительно центра тяжести сечения, приложенных по одну сторону от сечения.

Примем следующее правило знаков для изгибающих моментов: внешний момент M_i входит в сумму в формуле (5.4) со знаком “+”, если он стремится вызвать изгиб балки выпуклостью вниз.

Согласно этому правилу реакция R_A вызывает изгиб левой части балки выпуклостью вниз (рисунок 5.4, б). Поэтому изгибающий момент от нее в формуле (5.3) положительный.

Для правой части балки изгибающий момент в том же самом сечении z создается реакцией R_B , которая вызывает изгиб этой части выпуклостью вниз (рисунок 5.4, б), и внешней силой F , которая вызывает изгиб выпуклостью вверх.

Поэтому изгибающий момент от реакции R_B положительный, а от силы F – отрицательный.

Изгибающий момент для правой части балки

$$\begin{aligned} M_{из} &= R_B(l - z) - F(a - z) = \\ &= \frac{F a}{l}(l - z) - F(a - z) = \frac{F b}{l} z. \end{aligned}$$

Полученное значение $M_{из}$ для правой части балки совпадает со значением для левой части (см. формулу (5.3)).

5.5 Дифференциальные зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом

Рассмотрим балку с произвольной нагрузкой (рисунок 5.5, а). Распределенную нагрузку направим вверх. Такая нагрузка дает положительную составляющую для изгибающего момента в любом сечении.

Выделим на участке, где нет сосредоточенных сил и моментов, малый элемент $O_1 O_2$. Он находится в равновесии под действием внешней нагрузки, поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях O_1 и O_2 , расположенных на расстоянии dx один от другого (рисунок 5.5, б). Поскольку в общем Q и $M_{из}$ изменяются вдоль оси балки, то в сечении O_1 имеем $Q(z)$ и $M_{из}(z)$, а в сечении O_2 имеем $Q(z) + dQ$ и $M_{из}(z) + dM_{из}$. Для вывода будем их считать положительными.

Из условия равновесия выделенного элементарного участка балки длиной dz получим

$$\sum F_i^y = Q + q dz - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_i^{O_2} = M_{из} + Q dz + q dz \frac{dz}{2} - (M_{из} + dM_{из}) = 0.$$

Первое уравнение дает условие

$$\frac{dQ}{dz} = -q. \quad (5.5)$$

Первая производная от поперечной силы в сечении балки равняется интенсивности распределенной нагрузки в этом сечении.

Из второго уравнения, пренебрегая членом $q dz(dz/2)$ второго порядка малости, найдем

$$\frac{dM_{из}}{dz} = Q. \quad (5.6)$$

Первая производная от изгибающего момента в сечении балки равняется поперечной силе в этом сечении.

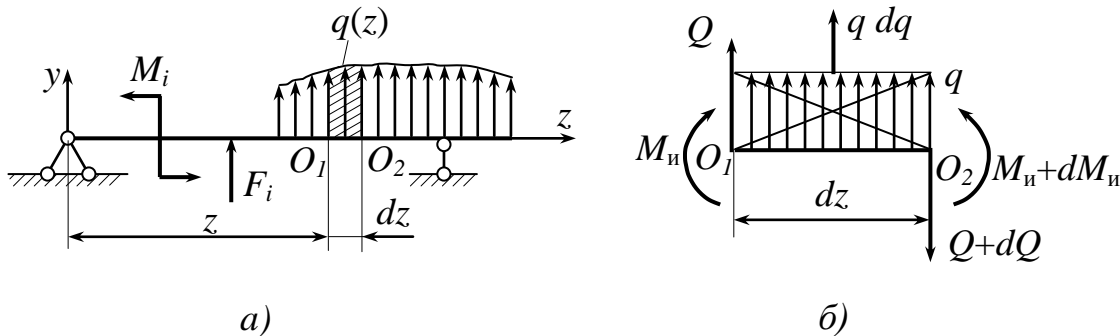


Рисунок 5.5 – Балка с произвольно распределенной нагрузкой: а – расчетная схема; б – элемент балки

На основании формул (5.5) и (5.6) будем иметь

$$\frac{d^2 M_{из}}{dz^2} = -q. \quad (5.7)$$

Вторая производная от изгибающего момента в сечении балки равняется интенсивности распределенной внешней нагрузки.

Соотношение (5.5) – (5.7) называют *дифференциальными зависимостями при изгибе* (зависимостями Д. И. Журавского).

Их используют при построении и контроле правильности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

5.6 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов рассмотрим на примерах.

Пример 1. Балка с защемлением длиной l загружена на свободном конце сосредоточенной силой F (рисунок 5.6, а).

Поместим начало координат на левом конце балки, ось z направим вдоль продольной оси балки, а оси x и y , соответственно, вертикально и горизонтально к ней. (Такую же систему координат примем и в других примерах, кроме случаев, которые обуславливаются отдельно). Мысленно рассечем балку сечением с координатой z ($0 \leq z \leq l$).

Поперечную силу определим как сумму внешних сил, которые приложены по левую сторону от сечения:

$$Q = -F.$$

Знак “–” принят потому, что сила F стремится повернуть левую отсеченную часть балки относительно сечения z против часовой стрелки. Поперечная сила Q не зависит от координаты z и во всех точках балки постоянна.

Сила F относительно центра тяжести сечения создает отрицательный изгибающий момент:

$$M_{из} = -Fz.$$

Это уравнение прямой линии. Для ее построения определим значения $M_{из}$ в двух точках A и B на концах балки:

$$\text{при } z = 0 \quad M_{изA} = 0; \quad \text{при } z = l \quad M_{изB} = -Fl.$$

Пример 2. Балка с защемлением длиной l испытывает действие распределенной нагрузки $q = \text{const}$ (рисунок 5.6, б).

Поперечная сила в сечении с координатой z ($0 \leq z \leq l$) равняется равнодействующей распределенной нагрузки, которая приложена к балке по левую сторону сечения: $Q_z = -qz$,

а изгибающий момент – произведению этой равнодействующей на плечо $z/2$: $M_{из} = -qz \cdot z/2 = -qz^2/2$.

Это уравнения прямой и параболы, соответственно. Для их построения определим внутренние силовые факторы на концах и посередине балки:

$$\text{При } z = 0 \quad Q_A = 0; M_{изA} = 0. \quad \text{При } z = l \quad Q_B = -ql; M_{изB} = -ql^2/2.$$

При $z = l/2$ $M_{\text{ис}} = -ql^2/8$.

Как следует из рисунка 5.6, б выпуклость параболы направлена навстречу направлению распределенной нагрузки q .

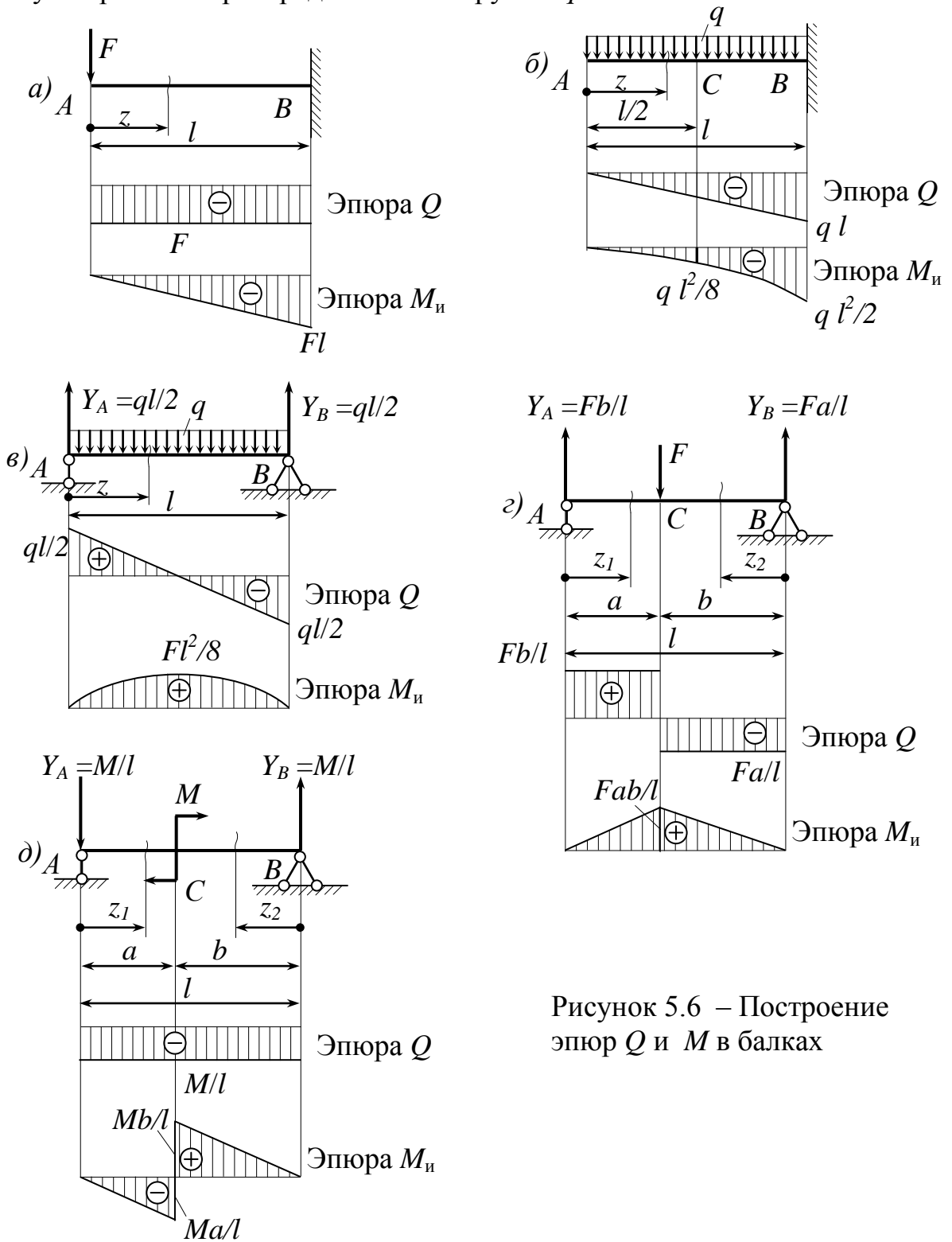


Рисунок 5.6 – Построение эпор Q и M в балках

Пример 3. Двухопорная балка длиной l загружена равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$ (рисунок 5.6, в).

Опорные реакции из условия равновесия с учетом симметричности нагрузки, будут:

$$Y_A = Y_B = ql/2.$$

Поперечная сила и изгибающий момент в сечении с координатой z ($0 \leq z \leq l$):

$$Q_z = Y_A - qz = q\frac{l}{2} - qz;$$

$$M_{из} = Y_A z - q\frac{z^2}{2} = q\frac{lz}{2} - q\frac{z^2}{2}.$$

Поперечная сила изменяется по линейному закону, изгибающий момент – по закону параболы. Их значения на концах балки:

$$\text{При } z = 0 \quad Q_A = q\frac{l}{2}; \quad M_{иА} = 0.$$

$$\text{При } z = l \quad Q_B = -q\frac{l}{2}; \quad M_{иВ} = 0.$$

Значение изгибающего момента на концах балки равняется 0, а поперечная сила изменяет знак в пределах участка. Согласно условию экстремума, которым является равенство нулю первой производной от изгибающего момента, т.е. в соответствии с условием (5.6), имеем:

$$\frac{dM_{и}}{dz} = Q = q\frac{l}{2} - qz = 0.$$

Отсюда координата сечения, где действует экстремальный (максимальный) изгибающий момент $z = l/2$, а его значение:

$$M_{и\max} = q\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = q\frac{l^2}{8}.$$

Максимальный момент действует в середине балки и ему соответствует нулевое значение поперечной силы. Выпуклость эпюры изгибающих моментов направлена навстречу действия распределенной нагрузки.

Пример 4. Двухопорная балка длиной $l = a + b$ на расстоянии a от левой опоры A загружена сосредоточенной силой F (рисунок 5.6, z).

Из условий равновесия определим опорные реакции:

$$Y_A = F\frac{b}{l}; \quad Y_B = F\frac{a}{l}.$$

Рассмотрим два участка балки : AC и BC .

Участок AC . Поперечная сила и изгибающий момент в сечении z_1 ($0 \leq z_1 \leq a$):

$$Q_1 = -Y_A = -F \frac{b}{l};$$

$$M_1 = Y_A z_1 = F \frac{b z_1}{l}.$$

Поперечная сила во всех сечениях участка AC постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Его значение на границах участка :

$$\text{При } z_1 = 0 \quad M_{иА} = 0. \quad \text{При } z_1 = a \quad M_{иС} = F \frac{ab}{l}.$$

Участок BC . Для этого участка примем систему координат с началом на правом конце балки, в точке B . Поперечная сила и изгибающий момент в сечении z_2 ($0 \leq z_2 \leq b$):

$$Q_2 = -Y_B = -F \frac{a}{l};$$

$$M_{и2} = Y_B z_2 = F \frac{a z_2}{l}.$$

Поперечная сила во всех сечениях участка BC постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Его значение на границах:

$$\text{При } z_2 = 0 \quad M_{иВ} = 0. \quad \text{При } z_2 = b \quad M_{иС} = F \frac{ab}{l}.$$

Пример 5. Двухопорная балка длиной $l = a + b$ на расстоянии a от левой опоры A нагружена сосредоточенным моментом M (рисунок 5.6, d).

Из условий равновесия балки определим опорные реакции :

$$Y_A = Y_B = \frac{M}{l}.$$

Рассмотрим два участка балки : AC и BC .

Участок AC . Поперечная сила и изгибающий момент в сечении z_1 ($0 \leq z_1 \leq a$):

$$Q_1 = -Y_A = -\frac{M}{l};$$

$$M_{и1} = -Y_A z_1 = -M \frac{z_1}{l}.$$

Поперечная сила во всех сечениях участка AC постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Его значение на границах участка:

$$\text{При } z_1 = 0 \quad M_{иА} = 0. \quad \text{При } z_1 = a \quad M_{иС} = -M \frac{a}{l}.$$

Участок BC . Для этого участка примем левую систему координат с началом на правом конце балки. Поперечное усилие и изгибающий момент в сечении z_2 ($0 \leq z_2 \leq b$):

$$Q_2 = -Y_B = -\frac{M}{l};$$

$$M_{и2} = Y_B z_2 = M \frac{z_2}{l}.$$

Поперечная сила во всех сечениях участка BC постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Его значение на границах участка:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_{иВ} = 0; \quad \text{при } z_2 = b \quad M_{иС} = M \frac{b}{l}.$$

Контроль правильности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Из дифференциальных зависимостей Журавского Д.И. при изгибе и из рассмотренных примеров вытекают следующие свойства эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

1) на участке балки между сосредоточенными силами, в том числе и реакциями, эпюра поперечных сил Q – прямая параллельная оси балки, а эпюра изгибающих моментов $M_{и}$ – наклонная к оси балки прямая (пример 1, п. 5.6);

2) в точках приложения сосредоточенных сил (и реакций) эпюра Q имеет “скачок” на величину силы, а эпюра $M_{и}$ – излом;

3) в точках приложения сосредоточенного момента эпюра M имеет “скачок” на величину приложенного момента, а эпюра Q – без перемен;

4) на участке с равномерно распределенной нагрузкой q эпюра Q наклонная к оси балки прямая, а эпюра $M_{и}$ – парабола с выпуклостью противоположной действию нагрузки q (пример 1, п. 5.6). если на этом участке эпюра Q изменяет знак, то в сечении, где $Q = 0$ эпюра $M_{и}$ имеет экстремум;

5) в шарнирных опорах и соединениях изгибающий момент равен нулю, если там отсутствует внешний момент (например, момент сил трения).

5.7 Нормальные напряжения при прямом чистом изгибе

При чистом изгибе в поперечных сечениях балки действуют только изгибающие моменты $M_{и}$, другие внутренние силовые факторы отсутствуют, в том числе и поперечная сила $Q = 0$.

В этом случае, из зависимости (5.6) вытекает, что при чистом изгибе изгибающий момент на этом участке балки постоянен: $M_{из} = \text{const}$.

Примером деформации чистого изгиба является балка с защемлением под действием сосредоточенного момента (рисунок 5.7), или ось колесной пары вагона (рисунок 5.8). В обоих случаях вес самих балок не учитывается.

Рассмотрим деформацию чистого изгиба резиновой модели балки прямоугольного сечения, на боковую поверхность которой нанесенная прямоугольная сетка (рисунок 5.9). По торцам балки приложим два момента $M_{из}$. Методом сечений нетрудно установить, что во всех сечениях балки действует постоянный изгибающий момент $M_{из} = M$, а поперечная сила $Q_y = 0$.

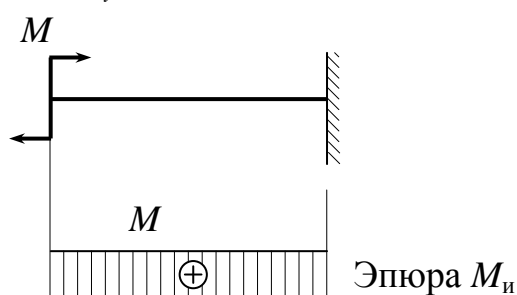


Рисунок 5.7 – Чистый изгиб консольной балки

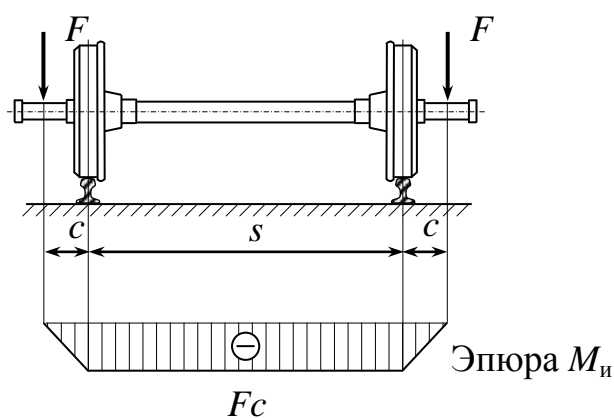


Рисунок 5.8 – Чистый изгиб колесной пары

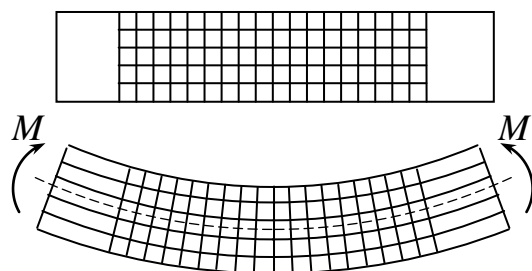


Рисунок 5.9 – Деформация чистого изгиба резиновой модели балки

Под нагрузкой продольная ось и продольные линии сетки согнутся по дугам окружностей (во всех сечениях действует один и тот же изгибающий момент, т.е. радиусы кривизны продольных линий во всех сечениях должны быть одинаковы), поперечные линии не искривляясь, повернутся на некоторые углы, оставаясь перпендикулярными продольным линиям. Длина средней продольной линии не изменится, расположенные выше ее продольные линии удлинятся, а расположенные ниже – сократятся.

Если предположить, что внутренние деформации балки имеют тот же характер, что и на поверхности, то при чистом изгибе:

- справедлива гипотеза плоских сечений (поперечные сечения балки, плоские и нормальные к продольной оси до приложения нагрузки, остаются такими же и при ее действии);
- отсутствует давление волокон одно на другое (поскольку отсутствует поперечная сила);
- в поперечных сечениях действуют только нормальные напряжения (поскольку изменяются длины волокон).

Для вывода формулы определения нормальных напряжений, рассмотрим деформацию консольной балки длиной l прямоугольного поперечного сечения с размерами b и h , нагруженной на свободном конце моментом M (рисунок 5.10, а). Двумя поперечными сечениями I и II с координатами z и $z + dz$ ($0 \leq z \leq l$) выделим бесконечно малый элемент балки длиной dz (рисунок 5.10, а, б). Будем считать, что сечение I неподвижно, тогда сечение II под действием нагрузки повернется на угол $d\varphi$ (рисунок 5.10, б). Длина средней линии не изменяется.

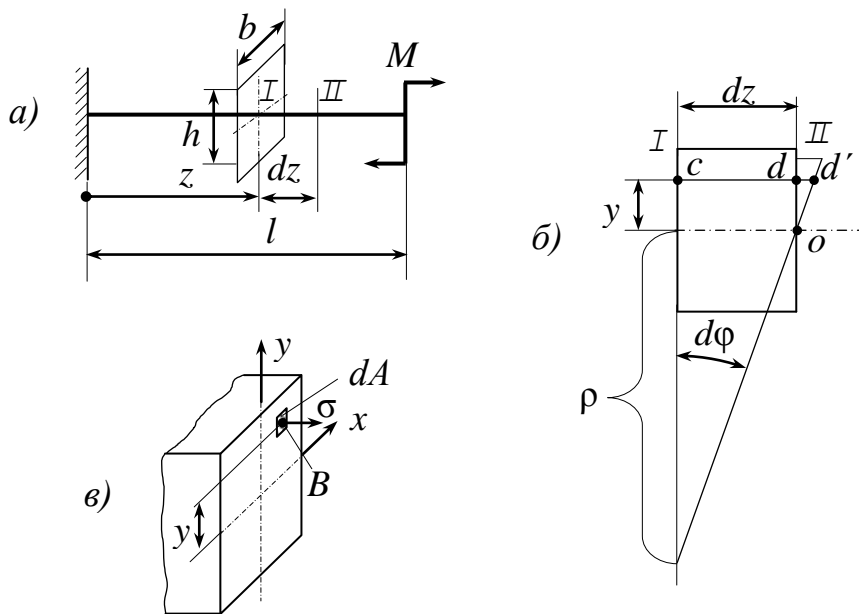


Рисунок 5.10 – Нормальные напряжения при чистом изгибе

Выделим в сечении II произвольную элементарную площадку dA (рисунок 5.10, в). Размеры площадки примем такими, чтобы изменением нормальных напряжений σ в середине ее можно пренебречь. Равнодействующая внутренних сил на площадке dA приложена в центре площадки в точке B , координата которой y ($-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$, где h – высота поперечного сечения).

Элементарный момент внутренних сил относительно оси x :

$$dM_{\text{и}} = \sigma y dA.$$

Интегрируя эту зависимость по всей площади сечения A , получим зависимость между изгибающими моментами и нормальными напряжениями в сечении балки:

$$M_{\text{и}} = \int_A \sigma y dA. \quad (5.8)$$

Распределение нормальных напряжений определим по относительным деформациям и закону Гука.

Рассмотрим деформацию отрезка cd длиной dz , проведенной параллельно продольной оси. При действии нагрузки точка d переместится у положение d' . относительная деформация отрезка будет:

$$\varepsilon = \frac{dd'}{cd}. \quad (5.9)$$

Из $\Delta dd'O$ имеем : $dd' = y \operatorname{tg} d\varphi$.

С учетом малости $d\varphi$, можно принять : $\operatorname{tg} d\varphi = d\varphi$,

Тогда : $dd' = y d\varphi$.

Длина отрезка cd : $cd = dz = \rho d\varphi$,

где ρ – радиус кривизны изогнутой оси балки.

С учетом двух последних зависимостей выражение (5.9) приобретает

вид :

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (5.10)$$

По закону Гука нормальное напряжение в точке B :

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = \frac{y}{\rho} E. \quad (5.11)$$

Подставив из (5.11) в (5.8) значение нормального напряжения, и вынеся за знак интеграла величины E и ρ , которые не зависят от переменной интегрирования, получим:

$$M_{\text{и}} = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (5.12)$$

Интеграл в выражении (5.12) называется осевым моментом инерции сечения. Он обозначается:

$$J_x = \int_A y^2 dA. \quad (5.13)$$

С учетом обозначений:

$$M_{\text{и}} = \frac{E}{\rho} J_x.$$

Отсюда величина, обратная радиусу кривизны оси балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\text{и}}}{EJ_x}. \quad (5.14)$$

Подставив (5.14) в (5.11), получим формулу для определения нормальных напряжений в сечении балки в зависимости от изгибающего момента

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{J_x} y. \quad (5.15)$$

Из этой формулы вытекает, что нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения прямо пропорциональны ее расстояния y от нейтральной оси, т.е. линейно изменяются по высоте сечения. От координаты x сечения напряжения не зависят, т.е. по ширине сечения нормальные напряжения неизменны.

В сечении балки есть нейтральная ось (или нулевая линия) в которой нормальные напряжения равны нулю. Отметим, что до сих пор ее положение было принято произвольно: это координатная ось Ox , совпадающая с осью симметрии сечения балки.

Положение нейтральной оси определим из условия, когда продольная сила N в сечении равняется нулю:

$$N = \int_A \sigma dA = 0. \quad (5.16)$$

Подставив в (5.16) значение нормального напряжения из (5.15), получим :

$$N = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Отношение $\frac{E}{\rho} \neq 0$, так как радиус кривизны не равняется бесконечности :

$\rho \neq \infty$ (реальная балка деформирована, ее ось согнута).

Интеграл в последней зависимости называется статическим моментом площади сечения относительно оси x , он обозначается S_x .

Выполнение условия (5.16) возможно, если статический момент равняется нулю:

$$S_x = \int_A y dA = 0. \quad (5.17)$$

Это означает, что ось Ox проходит через центр тяжести поперечного сечения и потому ось x является нейтральной.

Эпюра распределения нормальных напряжений по сечению балки прямоугольного сечения приведена на рисунке 5.11. Нейтральная ось делит сечение на две зоны: в одной возникают нормальные растягивающие напряжения, во второй – сжимающие. На нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю. В рассматриваемом примере верхние волокна балки растягиваются, нижние – сжимаются.

При прямом изгибе в балке с поперечным сечением, имеющем одну ось симметрии, положение нейтральной оси определяется из условия (5.17). На рисунке 5.12 приведена эпюра напряжений в балке треугольного поперечного сечения.

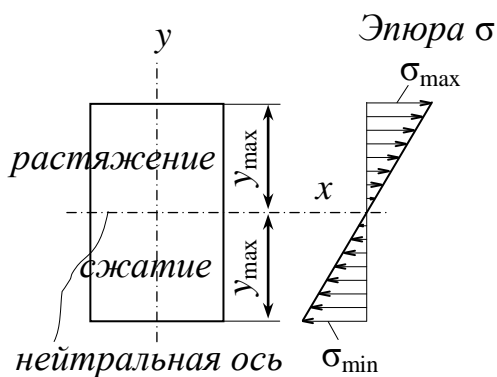


Рисунок 5.11 – Эпюра нормальных напряжений в прямоугольном сечении

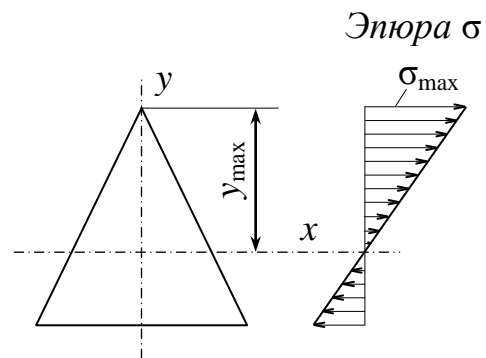


Рисунок 5.12 – Эпюра нормальных напряжений в треугольном сечении

В точках с координатой $y = y_{\max}$ в сечении действуют максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{и}}}{I_x} y_{\max} = \frac{M_{\text{и}}}{W_x},$$

где обозначим:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \quad (5.18)$$

Величина W_x называется осевым моментом сопротивления сечения относительно оси x .

Условие прочности при чистом изгибе:

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (5.19)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе; определяется по результатам испытания материалов.

5.8 Геометрические характеристики простых сечений

Для определения осевого момента инерции прямоугольного сечения (рисунок 5.13) выделим элементарную площадку высотой dh с координатой y .

Ее площадь: $dA = bdy$.

Подставим последнюю зависимость в (5.13) и изменив пределы интегрирования, получим:

$$J_x = \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

То есть:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (5.20)$$

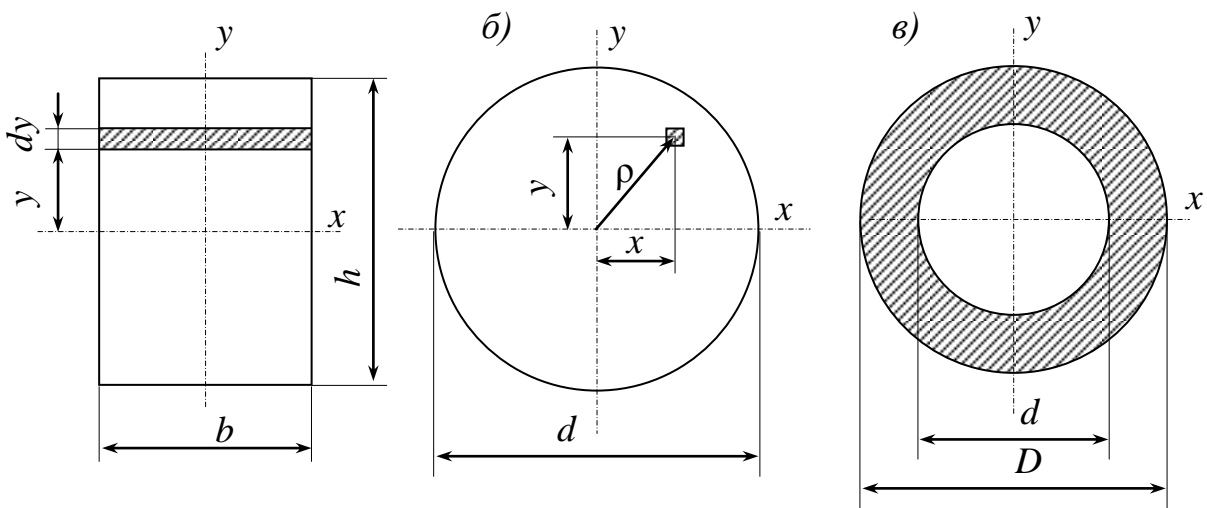


Рисунок 5.13 – Поперечные сечения балок

Осей момент сопротивления сечения с учетом, что $y_{\max} = h/2$:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{b \frac{h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}.$$

То есть:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}. \quad (5.21)$$

Полярный момент круглого сечения (рисунок 5.13), согласно формулам (4.7) и (4.13) равняется:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Заменим полярную координату ее значениями в декартовых координатах, в результате получим:

$$J_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = \frac{\pi d^4}{32}.$$

С учетом, что $J_y = \int_A x^2 dA$, $J_x = \int_A y^2 dA$ и для круглого сечения $J_x = J_y$, получим:

$$J_p = 2J_x = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Отсюда осевой момент инерции круглого сечения:

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Осевые моменты сопротивления с учетом, что $y_{\max} = d/2$:

$$W_x = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

В результате получаем:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (5.22)$$

Аналогично для круглого кольцевого сечения (рисунок 5.13, в):

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4}\right); \quad W_x = \frac{\pi d^3}{32} \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4}\right). \quad (5.23)$$

5.9 Нормальные и касательные напряжения при прямом поперечном изгибе

При поперечном изгибе в сечениях балки действуют изгибающий момент и поперечная сила, а потому, кроме нормальных напряжений в поперечных сечениях возникают и касательные напряжения. По закону пар-

ности такие же касательные напряжения возникают и в продольных сечениях.

Наличие касательных напряжений в продольных сечениях подтверждается таким опытом. Рассмотрим деформацию изгиба двух балок (рисунок 5.14), одна из которых составлена из отдельных брусков. При деформации отдельные бруски, составляющие балку, взаимно сдвинутся. В цельной балке сдвига продольных сечений не происходит, что указывает на наличие в продольных плоскостях касательных напряжений, которые противодействуют этим сдвигам.

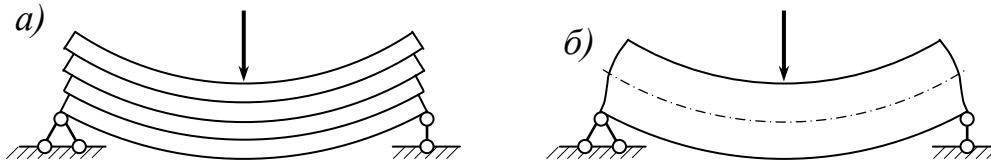


Рисунок 5.14 – Деформация балки, составленной из отдельных брусков (а) и цельной балки (б)

Действие касательных напряжений вызывает сдвиги отдельных волокон относительно друг друга, в результате чего гипотеза плоских сечений при поперечном изгибе не подтверждается, плоские до деформации сечения искривляются (рисунок 5.14, б). Однако, теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что влияние сдвигов на распределение нормальных напряжений при поперечном изгибе незначительно и им пренебрегают. Поэтому для определения нормальных напряжений изгиба используют формулу, выведенную для чистого изгиба:

$$\sigma = \frac{M_{из}}{J_x} y.$$

Для вывода формулы касательных напряжений мысленно вырежем из балки (рисунок 5.15, а, б) элемент длиной dz и дополнительным продольным сечением на расстоянии y от плоскости xOz , рассечем его на две части. Рассмотрим равновесие одной из них, например, верхней, на которую с обеих сторон действуют сжимающие нормальные напряжения σ .

С правой стороны в произвольной элементарной площадке dA с координатой y_1 нормальные напряжения больше нормальных напряжений на такой же площадке с левой стороны на величину $d\sigma_1$, поскольку изгибающий момент по правую сторону больше, чем по левую сторону на величину $dM_{из}$:

$$d\sigma_1 = \frac{dM_{из}}{J_x} y_1.$$

Соответственно, разность сжимающих сил, которые действуют на отсечённую часть по правую и по левую сторону, составляет:

$$dN = \int_{A_{\text{отс}}} d\sigma_1 dA = \int_{A_{\text{отс}}} \frac{dM_{\text{и}}}{J_x} y_1 dA = \frac{dM_{\text{и}}}{J_x} \int_{A_{\text{отс}}} y_1 dA.$$

Здесь интеграл является статическим моментом площади $A_{\text{отс}}$ (отсеченной части поперечного сечения) относительно оси Ox :

$$S_x^{\text{отс}} = \int_{A_{\text{отс}}} y_1 dA.$$

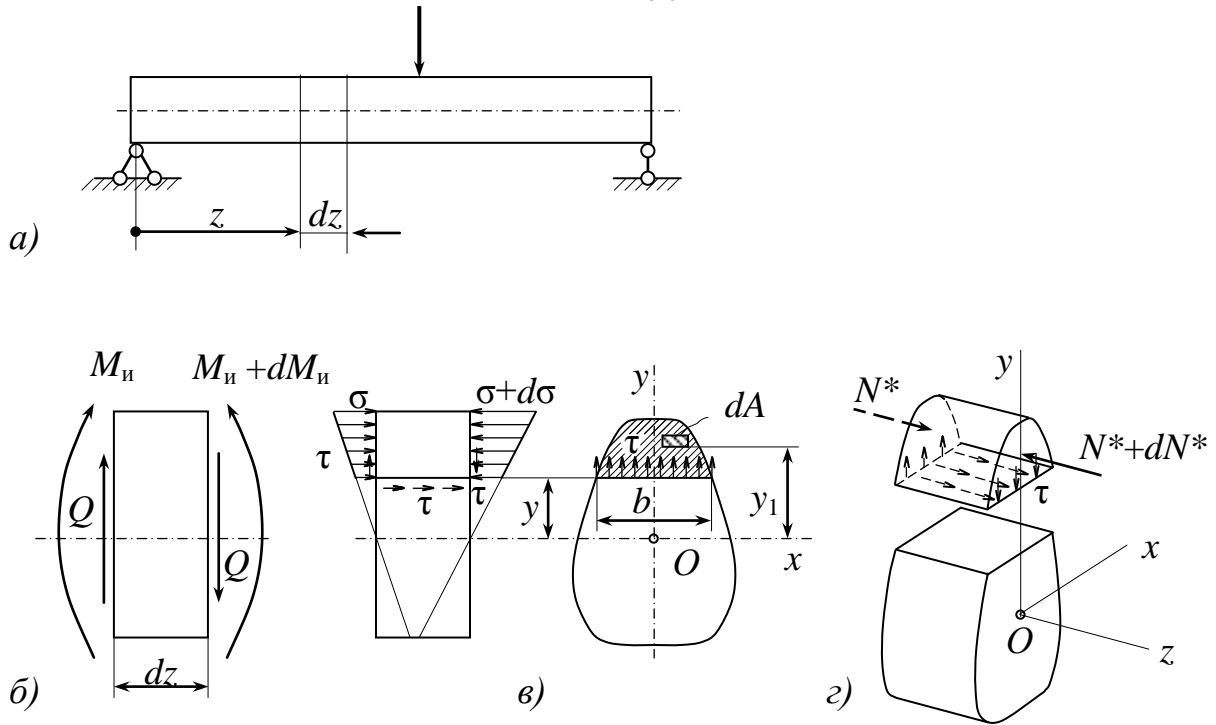


Рисунок 5.15 – К выводу формулы для касательных напряжений при поперечном изгибе

С учетом этого:

$$dN = \frac{dM_{\text{и}}}{J_x} S_x^{\text{отс}}.$$

Нормальная сила dN уравнивается касательной силой dT , которую создают касательные напряжения τ в продольной плоскости.

Из условия равновесия (равновесие проекций сил на ось z) имеем:

$$dT = dN.$$

Для определения касательных напряжений τ необходимо знать закон их распределения по ширине балки. Для большинства сечений, в которых высота больше ширины, принимается равномерное распределение:

$$d\tau = \tau b_y dz,$$

где b_y - ширина балки в сечении с координатой y .

Заменив в уравнении равновесия силы их значениями, после несложных преобразований, получим:

$$\tau = \frac{dM_{и}}{dz} \frac{S_x^{\text{отс}}}{J_x b_y}.$$

Но $\frac{dM_{и}}{dz} = Q$, поэтому в результате имеем:

$$\tau = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{J_x b_y}. \quad (5.24)$$

По закону парности такое же касательное напряжение действует и в поперечном сечении по линии $m-n$.

Порядок определения касательных напряжений по формуле

(5.24) :

- 1) выбирается поперечное сечение балки;
- 2) определяется поперечная сила и момент инерции сечения относительно нейтральной оси Ox ;
- 3) через точку, в которой необходимо определить касательные напряжения, проводится прямая, параллельная оси Ox , и определяется ширина балки в этом сечении;
- 4) подсчитывается статический момент $S_x^{\text{отс}}$ отсеченной части сечения относительно оси Ox по формуле :

$$S_x^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_c,$$

где $A_{\text{отс}}$ – площадь отсеченной части сечения;

y_c – координата центра тяжести отсеченной части сечения;

- 5) по формуле (5.24) определяются касательные напряжения.

Рассмотрим распределение касательных напряжений в балке прямоугольного сечения с размерами $b \times h$, в котором действует поперечная сила Q_y (рисунок 5.16).

Момент инерции сечения балки:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Проведем по сечению на расстоянии y $\left(-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}\right)$ прямую 1–1 параллельно оси Ox . Ширина балки: $b_y = b = \text{const}$.

Площадь и координата вертикальной отсеченной части (на рисунке она заштрихована):

$$A_{отс} = \left(\frac{h}{2} - y\right)b; \quad y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right).$$

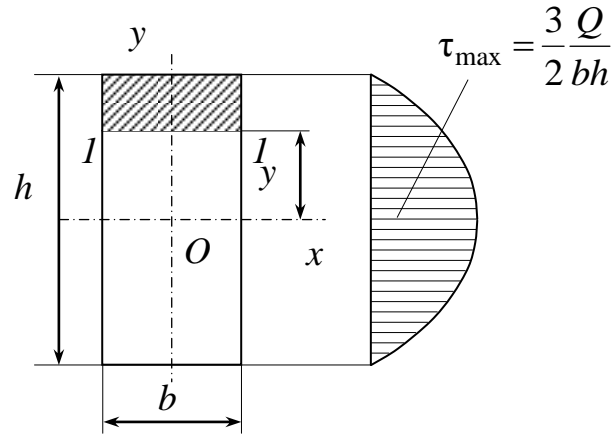


Рисунок 5.16 – Эпюра касательных напряжений в прямоугольном сечении

Статический момент отсеченной части площади:

$$S_x^{отс} = A_{отс}y_c = \left(\frac{h}{2} - y\right)b \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right);$$

$$\tau = \frac{Q_y \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{b^2 h^3}{12}} = \frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Касательные напряжения по высоте сечения изменяются по закону квадратичной параболы:

$$\text{при } y = \pm h/2 \quad \tau = 0;$$

$$\text{при } y = 0 \quad \tau = \tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{2A} = 1,5\tau_{\text{ср}},$$

где A – площадь сечения балки; $A = bh$.

$\tau_{\text{ср}}$ – среднее напряжение в балке:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q_y}{A}.$$

Пример. Определить максимальное нормальное и касательное напряжения в консольной балке прямоугольного сечения с размерами $b = 0,15$ м; $h = 0,2$ м, нагруженной на свободном конце силой $F = 100$ кН (рисунок 5.17).

Опасным является сечение A , в котором действуют поперечная сила $Q_y = 100$ кН и максимальный изгибающий момент $M_{из} = 100$ кН·м.

Максимальные нормальные и касательные напряжения в этом сечении :

$$\sigma = \frac{M_{из}}{W_x} = \frac{100 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{-6} = 100 \text{ МПа},$$

где W_x – осевой момент сопротивления сечения;

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,15 \cdot 0,2^2}{6} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$\tau = \frac{3Q}{2A} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,03} \cdot 10^{-6} = 5 \text{ МПа},$$

где A – площадь сечения; $A = b \cdot h = 0,15 \cdot 0,2 = 0,03 \text{ м}^2$.

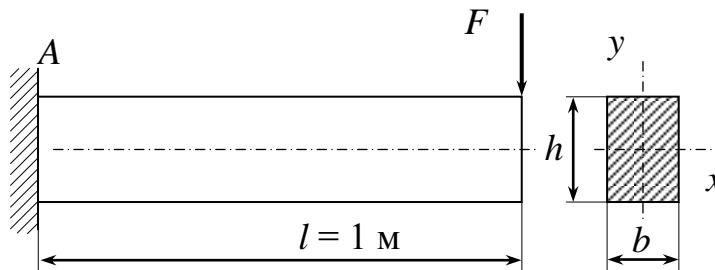


Рисунок 5.17 – Поперечный изгиб консольной балки

Как вытекает из расчета, величина касательных напряжений составляет 5% величины нормальных напряжений. Такое соотношение между нормальными и касательными напряжениями характерно для большинства балок инженерных конструкций, работающих на изгиб.

5.10 Деформации при изгибе

При прямом изгибе под действием внешней нагрузки, которая лежит в плоскости симметрии поперечного сечения балки, ее продольная ось искривляется в той же плоскости, а точки оси перемещаются.

Изогнутая ось балки называется упругой линией, а перемещение точек балки по нормали к недеформированной оси называются прогибами и обозначаются y (рисунок 5.18).

Поперечные сечения балки не только перемещаются поступательно, но поворачиваются на угол θ относительно своего первоначального положения. Такой же угол θ образует касательная, проведенная к упругой линии балки в этом же сечении, с продольной осью z .

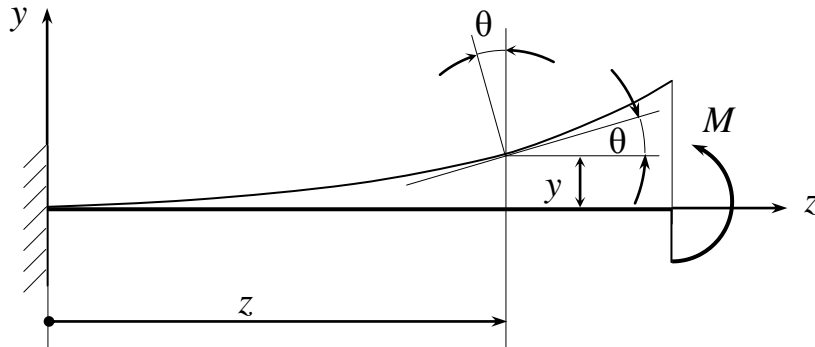


Рисунок 5.18 – Деформации балки при изгибе

Знаки деформаций балки определяются таким образом. При положительном изгибающем моменте (как на рисунке 5.18) прогиб y положительный, если он направлен по оси y , направленной вверх; угол поворота сечения θ считается положительным, если он направлен против движения часовой стрелки. На рисунке 5.18 прогиб y и угол поворота θ положительные.

Прогибы и углы поворота сечений связаны зависимостью

$$\frac{dy}{dz} = \operatorname{tg} \theta.$$

Для малых углов θ можно принять

$$\frac{dy}{dz} = \theta.$$

При изгибе в сечении действуют изгибающий момент и поперечная сила. Деформация балки, от поперечной силы Q обычно незначительна. Поэтому при определении деформаций изгиба учитывают только действие изгибающего момента.

При чистом изгибе ($Q = 0$, $M_{из} = \text{const}$) упругая ось балки прогибается по дуге окружности радиусом ρ (см. формулу (5.14)).

При прямом поперечном изгибе ($Q \neq 0$, $M_{из} \neq \text{const}$) кривизна упругой линии изменяется по длине балки. Определим деформации балки при прямом поперечном изгибе (без учета поперечных сил).

Величина, обратная радиусу кривизны плоской кривой, равняется

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставив в формулу $\frac{1}{\rho}$ вместо ее значения из (5.14), получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$\frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_{\text{н}}}{EJ_x}.$$

Уравнение справедливо для системы координат, начало которой расположено на левом конце балки, ось y направлена вверх, ось z – вправо.

Прогибы считаются положительными при перемещении оси балки вверх, а углы θ – при повороте сечений против часовой стрелки.

Углы $\theta = \frac{dy}{dz}$ обычно малы, поэтому квадратом производной можно пренебречь. Тогда

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{\text{н}}}{EJ_x}. \quad (5.25)$$

Зависимость (5.25) является приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси. Его интегрирование после разделения переменных дает следующие формулы для углов поворота и прогибов сечений балки:

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \frac{dy}{dz} = \int \frac{M_{\text{н}}}{EJ_x} dz + C_1; \\ y(z) &= \int dz \left(\int \frac{M_{\text{н}}}{EJ_x} dz \right) + C_1 z + C_2, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Для балок постоянного сечения $EJ_x = \text{const}$, поэтому

$$\theta(z) = \frac{1}{EJ_x} \left(\int M_{\text{н}} dz \right) + C_1; \quad (5.26)$$

$$y(z) = \frac{1}{EJ_x} \left[\int dz \left(\int M_{из} dz \right) \right] + C_1 z + C_2. \quad (5.27)$$

Задача. Определить угол поворота и прогиб сечения консольной балки длиной l , нагруженной на свободном конце силой F (рисунок 5.6, а).

Изгибающий момент $M_{из}$ в произвольном сечении балки с координатой z

$$M_{из}(z) = -Fz.$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$EJ_x \frac{d^2 y}{dz^2} = -Fz.$$

Его интегрирование с учетом $EJ_x = \text{const}$ дает

$$EJ_x \theta = EJ_x \frac{dy}{dz} = -\frac{Fz^2}{2} + C_1;$$

$$EJ_x y = -\frac{Fz^3}{6} + C_1 z + C_2.$$

Произвольные постоянные из условий закрепления балки (в защемлении при $z = l$ $\theta = \frac{dy}{dz} = 0$ и $y = 0$):

$$C_1 = \frac{Fl^2}{2}; \quad C_2 = -\frac{Fl^3}{3}.$$

Углы поворота и прогибы сечений балки

$$\theta(z) = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{Fl^2}{2} - \frac{Fz^2}{2} \right);$$

$$y(z) = \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{Fz^3}{6} + \frac{Fl^2 z}{2} - \frac{Fl^3}{3} \right).$$

На свободном конце балки (при $z = 0$)

$$\theta = \frac{Fl^2}{2EJ_x}; \quad y = -\frac{Fl^3}{3EJ_x}.$$

Значение y отрицательное, а значение θ положительное. Балка прогнется вниз, сечения повернутся против часовой стрелки.

Метод начальных параметров

При непосредственном интегрировании уравнения упругой линии балки, разбитой по условиям нагружения на несколько участков, необходимо для каждого участка определить две произвольные постоянные. При количестве участков более двух задача становится очень трудоемкой.

Метод начальных параметров позволяет при любом числе участков свести решение к определению двух произвольных постоянных: угла поворота и прогиба в начале координат.

Рассмотрим часть балки (рисунок 5.19), находящейся в равновесии под действием внешних нагрузок и опорных реакций.

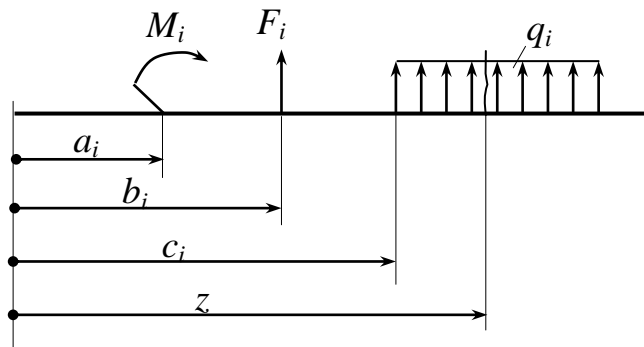


Рисунок 5.19 – Схема приложения нагрузок к балке

Примем начало координат на левом конце балки. Внешние нагрузки, указанные на чертеже, будем считать положительными. Координаты сечений, в которых приложены сосредоточенные моменты M_i и силы F_i , а также левые границы участков с распределенной нагрузкой q_i , обозначим, соответственно, a_i , b_i , c_i .

Сечение с координатой z расположено на участке с распределенной нагрузкой q_i .

Определим методом сечений изгибающий момент в сечении балки с координатой z . Для этого суммируем моменты от внешних нагрузок, приложенных к балке по левую сторону от сечения, т.е. от нагрузок, для которых $(z - a_i) > 0$, $(z - b_i) > 0$ или $(z - c_i) > 0$

$$M_{из}(z) = \sum M_i + \sum F_i(z - b_i) + \sum q_i \frac{(z - c_i)^2}{2}. \quad (5.28)$$

Подставив значение изгибающего момента из (5.28) в (5.26) и (5.27), после интегрирования получим зависимости для определения перемещений сечения с координатой z

$$\theta(z) = \frac{1}{EJ_x} \left[\sum \frac{M_i(z - a_i)}{1!} + \sum \frac{F_i(z - b_i)^2}{2!} + \sum \frac{q_i(z - c_i)^3}{3!} \right] + C_1;$$

$$y(z) = \frac{1}{EJ_x} \left[\sum \frac{M_i(z-a_i)^2}{2!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^3}{3!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^4}{4!} \right] + C_1 z + C_2 .$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 выразим через значения угла поворота и прогиба балки в начале координат, т.е. из условия

$$\text{при } z = 0 \quad \theta = \theta_0; \quad y = y_0,$$

где θ_0, y_0 – угол поворота и прогиб балки в начале координат.

Из уравнений для угла поворота и прогиба балки в начале координат с учетом последнего условия, находим

$$C_1 = \theta_0; \quad C_2 = y_0.$$

Тогда окончательно получим

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left[\sum \frac{M_i(z-a_i)}{1!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^2}{2!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^3}{3!} \right]; \quad (5.29)$$

$$y(z) = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ_x} \left[\sum \frac{M_i(z-a_i)^2}{2!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^3}{3!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^4}{4!} \right] \quad (5.30)$$

Иногда зависимости (5.29) и 5.30) удобнее применять в таком виде:

$$EJ_x \theta(z) = EJ_x \theta_0 + \sum \frac{M_i(z-a_i)}{1!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^2}{2!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^3}{3!}; \quad (5.31)$$

$$EJ_x y(z) = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + \sum \frac{M_i(z-a_i)^2}{2!} + \sum \frac{F_i(z-b_i)^3}{3!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^4}{4!}. \quad (5.32)$$

Особенности применения формул (5.31), (5.32):

1) Начало координат располагается на левом конце балки; z – координата сечения, перемещения которого определяются;

2) Суммируются только нагрузки, приложенные по левую сторону от сечения, т.е. такие, для которых

$$(z-a_i) > 0, \quad (z-b_i) > 0 \quad \text{или} \quad (z-c_i) > 0;$$

3) Если правая граница распределенной нагрузки располагается левее рассматриваемого сечения z , то эту нагрузку следует продолжить к сечению z , и на этом же участке приложить такую же распределенную нагрузку, но направленную противоположно;

4) Начальные параметры θ_0 и y_0 определяются из условий закрепления балки; например, для балки с защемленным левым концом $\theta_0 = 0; y_0 = 0$.

Пример. Определить перемещение сечений двухопорной балки длиной l , нагруженной посередине силой F (рисунок 5.20).

Реакции опор $Y_A = Y_B = \frac{F}{2}$.

Начальные параметры $\theta_0 = \theta_A$; $y_0 = y_A = 0$.

По условиям нагружения разобьем балку на два участка: AC и BC .
Углы поворота и прогибы сечений:

– участок AC $\left(0 \leq z_1 \leq \frac{l}{2}\right)$

$$EJ_x \theta = EJ_x \theta_0 + \frac{F}{2} \cdot \frac{z_1^2}{2!} = EJ_x \theta_0 + \frac{1}{4} F z_1^2;$$

$$EJ_x y = EJ_x \theta_0 z_1 + \frac{F}{2} \cdot \frac{z_1^3}{3!} = EJ_x \theta_0 z_1 + \frac{1}{12} F z_1^3;$$

– участок BC $\left(\frac{l}{2} \leq z_2 \leq l\right)$

$$EJ_x \theta = EJ_x \theta_0 + \frac{F}{2} \cdot \frac{z_2^2}{2!} - F \cdot \frac{\left(z_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2!} = EJ_x \theta_0 + \frac{1}{4} F z_2^2 - \frac{1}{2} \left(z_2 - \frac{l}{2}\right)^2;$$

$$EJ_x y = EJ_x \theta_0 z_2 + \frac{F}{2} \cdot \frac{z_2^3}{3!} - F \cdot \frac{\left(z_2 - \frac{l}{2}\right)^3}{3!} = EJ_x \theta_0 z_2 + \frac{1}{12} F z_2^3 - \frac{1}{6} \left(z_2 - \frac{l}{2}\right)^3.$$

Неизвестное значение начального параметра θ_0 определим из условия отсутствия прогиба под опорой B , т.е.

при $z = l$ $y_B = 0$.

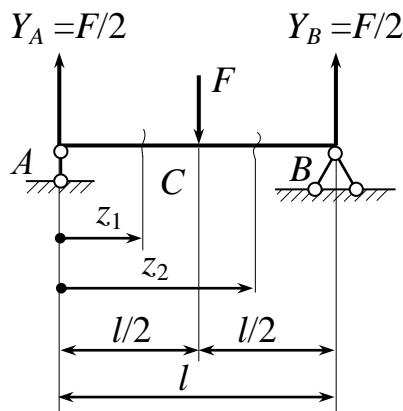


Рисунок 5.20 – К определению перемещений методом начальных параметров

Или

$$EJ_x y_B = EJ_x \theta_0 l + \frac{1}{12} Fl^3 - \frac{1}{6} F \left(l - \frac{l}{2} \right)^3 = 0.$$

Откуда

$$EI_x \theta_0 = -\frac{1}{16} Fl^2; \quad \theta_0 = -\frac{Fl^2}{16EI_x}.$$

Подставив значение θ_0 в уравнения углов поворота и прогибов, окончательно получим:

– для участка AC $\left(0 \leq z_1 \leq \frac{l}{2} \right)$

$$\theta = -\frac{F(l^2 - 4z_1^2)}{16EI_x}; \quad y = -\frac{Fz_1(3l^2 - 4z_1^2)}{48EI_x};$$

– для участка BC $\left(\frac{l}{2} \leq z_2 \leq l \right)$

$$\theta = -\frac{F}{16EI_x} (3l^2 + 4z_2^2 - 8z_2l); \quad y = -\frac{F}{48EI_x} (9l^2z + 4z_2^3 - 12z_2^2l - l^3).$$

Деформация балки в середине пролета при $z = \frac{l}{2}$:

$\theta = 0$ (это очевидный результат);

$$y = -\frac{Fl^3}{48EI_x}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Писаренко Г. С. та ін. Опір матеріалів: Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. — 2-ге вид., допов. і переробл. — К.: Вища шк., 2004. — 655 с.
2. Дарков А.Ф., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. Учебник для вузов. «Высш. школа», 1975. 654 с.
3. Сопротивление материалов. Феодосьев В.И., «Наука», 1972. 595 с.
4. В.Т. Павлице, Є.В. Харченко, А.Ф Барвінський, Ю.Г. Гаршнев. Прикладна механіка. Навчальний посібник. /За ред. В.Т. Павлице. — Львів: "Інтелект-Захід", 2004. — 368 с.
5. Задачі з опору матеріалів: Навчальний посібник / Ф. Л. Шевченко,

- О. Ф. Толкачов, О. В. Нижнік. – Донецьк: РВА ДонНТУ, 2002. – 221 с.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов. Учеб. пособие для вузов. Под ред. А.В. Александрова. М., Стройиздат, 1977. – 335 с.